MTH2120

Analyse appliquée
Devoir # 6

Date de remise: Lundi le 15 avril 2024.

(Lors de la remise, deux questions seront choisies au hasard pour être corrigées.)

Ce devoir sera corrigé sur 10 points avec la répartition suivante des points :

- Pour joindre la page couverture du devoir (qui est disponible sur Moodle): 1 point
- Pour la correction des deux questions choisies: 6 points
- Si les autres questions non choisies ont été bien rédigées: 3 points .

Exercice 1 *Soit la fonction f définie sur l'intervalle $]\,0, 2\pi\,[$ par*

$$f(t) = \begin{cases} 1 & si\ 0 < t \leq \pi \\ 0 & si\ \pi < t < 2\pi. \end{cases}$$

a) Trouvez la série de Fourier du prolongement périodique impair de f.

b) Vers quelle valeur la série de Fourier trouvée en a) converge-t-elle lorsque

(i) $t = -\pi$?

(ii) $t = 7\pi/2$?

c) Trouvez la valeur de la somme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[1 - \cos(n\frac{\pi}{2})]^2}{n^2}.$$

Exercice 2 *Soit la fonction f définie par*

$$f(t) = \begin{cases} \cos(t) & si\ -\pi/2 < t < \pi/2 \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

Calculez la transformée de Fourier de f.

Exercice 3 *Soit a une constante réelle positive et $f(t) = e^{-a|t|}$.*

a) Calculez la transformée de Fourier de la fonction f.

b) Calculez la tranformée de Fourier de la fonction $g(t) = e^{-a|t-c|}$, où $c \in \mathbb{R}$.

c) Évaluez l'intégrale

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+\omega^2)^2}\, d\omega.$$

Indice: Pensez à l'identité de Parseval.

d) Calculez la transformée de Fourier de la fonction $h(t) = \dfrac{1}{a^2+t^2}$.
Indice: Pensez à la propriété de symétrie.

Exercice 4 *Soit $u(t-c)$ la fonction de Heaviside. En utilisant le résultat*

$$\mathcal{F}\left\{u(t+1) - u(t-1)\right\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin(\omega)}{\omega},$$

ainsi que les propriétés de la transformée de Fourier, calculez $\mathcal{F}\left\{f\right\}$, où

$$f(t) = \begin{cases} 1-t^2 & \text{si } -1 < t < 1 \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

Exercice 5

Considérons la fonction

$$f(t) = \begin{cases} e^t & \text{si } 0 \le t \le 1 \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

a) Calculez la transformée de Fourier de $f(t)$.

b) Calculez la transformée de Fourier du produit de convolution $(f * f)(t)$.

c) En utilisant obligatoirement une des propriétés de la transformée de Fourier, calculez la transformée de Fourier de $g(t) = t\, e^t$.