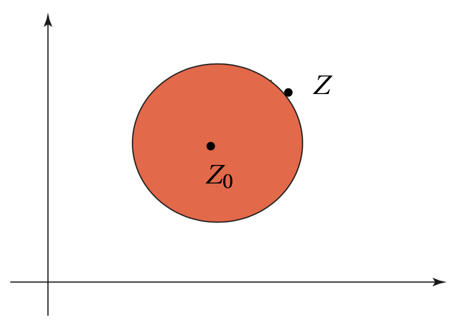
Chapitre 3

Limite et continuité

Définition 3.1. *Soit f une fonction complexe. Alors lorsqu'on écrit :*

$$\boxed{\lim_{z \to z_0} f(z) = L}$$



Cela signifie que lorsque z s'approche de z_0, quelque soit le chemin d'approche, la valeur $f(z)$ sera la même partout autour de z_0 et elle vaudra L . Notez que L n'est pas nécessairement $f(z_0)$.

Formellement nous écrivons :

Pour tout $\epsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$ tel que

$$\underbrace{|z - z_0|}_{\text{distance de } z \text{ à } z_0} < \underbrace{\delta}_{\text{dépend de } z_0 \text{ et } \epsilon} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{|f(z) - L|}_{\text{distance de } f(z) \text{ à } L} < \epsilon$$

C'est-à-dire que $f(z)$ s'approche de L lorsque z s'approche de z_0 et cela quelque soit le chemin d'approche.

Note :

> Pour effectuer une démonstration à l'aide de la définition formelle $epsilon-delta$, on commence par développer le terme $|f(z) - L| < \delta$ et de celui-ci, on isole $|z - z_0|$ en fonction de ϵ et z_0. Par la suite, on choisit δ en fonction de ϵ et z_0. Et finalement on réécrit la définition.

Exemple 3.1. *À l'aide de la définition formelle de la limite (epsilon-delta), démontrez*

$$\lim_{z \to 1} 2z = 2$$

Solution.

$$|f(z) - L| = |2z - 2| = 2|z - 1| < \epsilon \ \Rightarrow \ |z - 1| < \underbrace{\frac{\epsilon}{2}}_{\text{posons}=\delta}$$

Ainsi en réécrivant la définition, nous avons
$\forall \epsilon > 0$*, il existe un* $\delta = \frac{\epsilon}{2} > 0$ *tel que*

$$|z - 1| < \delta \qquad \Rightarrow \qquad |2z - 2| < \epsilon$$

Définition 3.2. *Une fonction complexe f est dite **continue** en z_0 si*

$$\boxed{\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)}$$

Formellement nous écrivons :

Pour tout $\epsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$ tel que

$$\text{si} \quad \underbrace{|z - z_0|}_{\text{distance de } z \text{ à } z_0} < \underbrace{\delta}_{\text{dépend de } z_0 \text{ et de } \epsilon} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{|f(z) - f(z_0)|}_{\text{distance de } f(z) \text{ à } f(z_0)} < \epsilon$$

Note : Dans le cas particulier où δ ne dépend que de ϵ (il n'y a pas de z_0), alors la fonction est dite **uniformément continue**.

Exemple 3.2. *En utilisant la définition formelle de la limite (epsilon-delta), montrez que la fonction*

$$f(z) = 4z - 1$$

en continue pour tout point z_0.

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\Big|f(z) - f(z_0)\Big| &= \Big|(4\,z - 1) - (4\,z_0 - 1)\Big| \\
&= \Big|4\,(z - z_0)\Big| \\
&= 4\Big|(z - z_0)\Big| < \epsilon \qquad \Rightarrow \Big|(z - z_0)\Big| = \underbrace{\frac{\epsilon}{4}}_{=\delta}
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\forall\epsilon > 0, \text{ il existe } \delta = \frac{\epsilon}{4} > 0 \text{ telle que si } \qquad \Big|z - z_0\Big| < \delta \quad \Rightarrow \quad \Big|f(z) - f(z_0)\Big| < \epsilon$$

Les fonctions suivantes sont continues en tout point de leur domaine :

- polynômes;
- fonctions trigonométriques;
- fonction exponentielle;
- somme, produit et composition de fonctions continues.

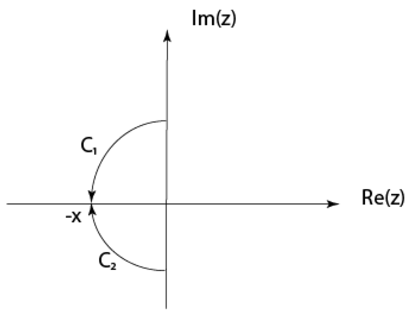
Exemple 3.3. *Soit $f(z) = \ln(z)$ et $z_0 = -x$ où x est un nombre réel strictement positif.(i.e. $x > 0$).*
Montrons que la fonction $f(z)$ est discontinue en z_0.

Solution :
Vérifions l'expression :

$$\boxed{\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)}$$

Pour la branche principale (k=0, $arg(z) \in]-\pi, \pi]$), nous avons

- $f(z_0) = f(-x) = \ln(-x) = \ln(|-x|) + i\,(\pi + 2\underbrace{k}_{k=0}\pi) = \ln(x) + i\,\pi$
- *Évaluons* $\lim_{z\to -x} f(z)$.
  Montrons que la limite n'existe pas en z_0 en approchant le point $z_0 = -x$ selon 2 chemins C_1 et C_2 constitués des deux arcs de cercle illustrés à la figure suivante.



Soit :

$C_1 : z = |z|e^{i\theta} = xe^{i(\pi-t)}$ avec $t > 0$ et

$C_2 : z = |z|e^{i\theta} = xe^{i(-\pi+t)}$ avec $t > 0$.

Remarquons que lorsque

$$t \to 0,\ x\,e^{i(\pi-t)} \to x\,e^{i\pi} = -x \text{ et } x\,e^{i(-\pi+t)} \to x\,e^{i(-\pi)} = -x$$

Considérons $arg(z) \in]-\pi, \pi]$

- *Pour le chemin C_1.*

$$\begin{aligned}
\lim_{z\to -x} f(z) &= \lim_{t\to 0} \ln(x\,e^{i(\pi-t)}) \\
&= \lim_{t\to 0} \left[\ln(|x|\underbrace{|e^{i(\pi-t)}|}_{=1}) + i((\pi - t) + 2\underbrace{k}_{=0}\pi)\right] \\
&= \ln(x) + i\pi
\end{aligned}$$

- *Pour le chemin C_2.*

$$\begin{aligned}
\lim_{z\to -x} f(z) &= \lim_{t\to 0} \ln(x\,e^{i(-\pi+t)}) \\
&= \lim_{t\to 0} [\ln(x) + i((-\pi + t) + 2\underbrace{k}_{=0}\pi)] \\
&= \ln(x) - i\pi
\end{aligned}$$

Conclusion.
Puisque les deux limites ne sont pas égales, alors $\lim_{z \to -x} f(z)$ *n'existe pas et ainsi* f *n'est pas continue en* $z_0 = -x$.

Notons que

- On peut montrer que $\ln(z)$ est continue en tout point z_0 n'appartenant pas à l'axe des réels négatifs, l'origine compris.
- La fonction $\ln(z)$ n'est pas continue sur l'axe des réels négatifs, qui constitue une "coupure" dans son domaine. Le point $z_0 = 0$ est un point de branchement pour la fonction $\ln(z)$.
- La fonction $\ln(z)$ n'est pas définie en $z_0 = 0$.