6.2 Série de Laurent

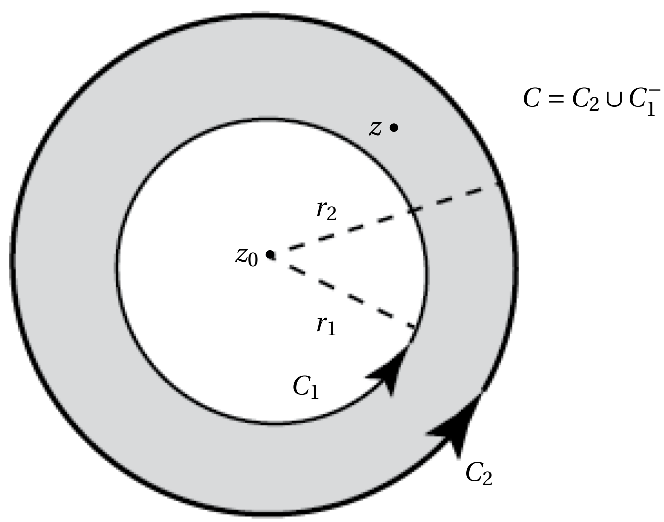
Les séries de Laurent peuvent être vues comme une extension des séries de Taylor pour décrire une fonction f autour d'un point z_0 où elle n'est pas (a priori) définie.
Les séries de Laurent furent nommées ainsi après leur publication par Pierre Alphonse Laurent en 1843. Karl Weierstrass les découvrit le premier mais il ne publia pas sa découverte.

Théorème 6.1. *Si $f(z)$ une fonction analytique à l'intérieur et sur la frontière d'une couronne $r_1 \leq |z - z_0| \leq r_2$. Alors pour tout z à l'intérieur de cette couronne,*

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \\ \text{où} \qquad a_n &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|w-z_0|=r} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}}\, dw, \qquad \text{avec} \quad r_1 \leq r \leq r_2. \end{aligned}$$

Preuve.

Considérons une couronne dont la frontière C est parcourue dans le sens direct.



Par la formule de Cauchy,

$$\boxed{f(z_0) = \frac{1}{2\,\pi\, i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)}\, dz}$$

alors en substituant $z = w$ et $z_0 = z$, dans cette formule, nous obtenons

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(w)}{(w-z)}\, dw$$

Ainsi

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_C \frac{f(w)}{(w-z)}\, dw \qquad\qquad \text{et puisque } C = C_1^- \cup C_2 \\ &= \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{C_2} \frac{f(w)}{(w-z)}\, dw}_{\text{notons } I_2} - \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{C_1} \frac{f(w)}{(w-z)}\, dw}_{\text{notons } I_1} \end{aligned} \tag{6.2.2}$$

- Sur C_2. (Courbe externe)
  Soit w appartenant à la courbe extérieure C_2 . Nous avons $\left|\frac{z-z_0}{w-z_0}\right| < 1$, d'où

$$\begin{aligned} \frac{1}{w-z} &= \frac{1}{w-z+z_0-z_0} = \frac{1}{(w-z_0)-(z-z_0)} = \frac{1}{w-z_0}\left[\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{w-z_0}}\right] \\ &\overset{\text{S.géo.}}{=} \left[\frac{1}{w-z_0}\right] \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{z-z_0}{w-z_0}\right]^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}} \end{aligned}$$

  Ainsi

$$\begin{aligned} I_2 = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{C_2} \frac{f(w)}{(w-z)}\, dw &= \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{C_2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}} \cdot f(w)\, dw \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (z-z_0)^n \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{C_2} (w-z_0)^{-(n+1)} f(w)\, dw}_{\text{Posons } = a_n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \end{aligned}$$

- Sur C_1. (Courbe interne)
  Soit w appartenant à la courbe intérieure C_1 . Alors nous avons $\left|\frac{w-z_0}{z-z_0}\right| <$

1. Ainsi

$$\begin{aligned}
\frac{1}{w-z} &= \frac{1}{w-z+z_0-z_0} = \frac{(-1)}{(z-z_0)-(w-z_0)} = \frac{(-1)}{z-z_0}\left[\frac{1}{1-\frac{w-z_0}{z-z_0}}\right] \\
&\overset{\text{S.géo.}}{=} -\left[\frac{1}{z-z_0}\right]\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{w-z_0}{z-z_0}\right]^n \\
&= -\left[\frac{1}{z-z_0}\right]\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{w-z_0}{z-z_0}\right]^{n-1} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(w-z_0)^{n-1}}{(z-z_0)^n}.
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
I_1 = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(w)}{(w-z)}\,dw &= -\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(w-z_0)^{n-1}}{(z-z_0)^n}\cdot f(w)\,dw \\
&= -\sum_{n=1}^{\infty}(z-z_0)^{-n}\underbrace{\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}(w-z_0)^{n-1}f(w)\,dw}_{\text{Posons } = a_{-n}} \\
&= -\sum_{n=1}^{\infty}a_{-n}(z-z_0)^{-n} \qquad \text{et par le chang.variable : } n^* = -n \\
&= -\sum_{n^*=-1}^{-\infty}a_{n^*}(z-z_0)^{n^*} \\
&= -\left[\cdots + a_{-2}(z-z_0)^{-2} + a_{-1}(z-z_0)^{-1}\right] \\
&= -\sum_{n=-\infty}^{-1}a_n(z-z_0)^n, \qquad \text{(n est une variable muette)}
\end{aligned}$$

Donc la relation (6.2.2) devient

$$\begin{aligned}
f(z) &= I_2 - I_1 \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n + \sum_{n=-\infty}^{-1}a_n(z-z_0)^n \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-z_0)^n
\end{aligned}$$

Remarques.

1. Si $f(z)$ est en plus analytique à l'intérieur de C_1 alors par le théorème de Cauchy et la formule généralisée de Cauchy,

$$\boxed{f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz \iff \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz.}$$

on constate que :

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|w-z_0|=r} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\, dw = \begin{cases} 0, \ \text{pour } n = -1, -2, \dots \\ \dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \ \text{pour } n = 0, 1, 2, \dots \end{cases} .$$

Ce qui donne la formule de Taylor.

2. On peut avoir $r_1 = 0$, $(0 < |z - z_0| < r_2)$ et $r_2 = \infty$ $(|z - z_0| > r_1)$.
3. Cas particulier pour $n = -1$

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|w-z_0|=r} f(w)\, dw$$

4. Le développement de Laurent est unique dans une couronne donnée. On peut avoir deux développements différents dans deux couronnes centrées au même point z_0.

Exemple 6.1. *Écrire le développement en série de Laurent de la fonction*

$$f(z) = \frac{1}{z^3 - z^4}$$

qui est valide pour

a) $0 < |z| < 1 \quad (z_0 = 0)$

b) $|z| > 1$

Solution.

a) Nous avons

$$\begin{aligned}\frac{1}{z^3 - z^4} &= \frac{1}{z^3} \cdot \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{n-3} \\ &= \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + 1 + z + \cdots \qquad \text{valable pour } 0 < |z| < 1.\end{aligned}$$

b) Puisque $|z| > 1$ *alors il faut que* $\frac{1}{|z|} < 1$. *Ainsi*

$$\begin{aligned}\frac{1}{z^3 - z^4} &= \frac{-1}{z^4} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} = \frac{-1}{z^4} \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{z})^n \quad \text{valable pour } |z| > 1. \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+4}}\end{aligned}$$

Exemple 6.2. *Écrire le développement en série de Laurent de la fonction*

$$f(z) = \frac{1}{(z+1)(z+3)}$$

qui est valide pour $|z| > 3$.

Solution.

Nous avons par une décomposition en fractions partielles,

$$\frac{1}{(z+1)(z+3)} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{z+1} - \frac{1}{z+3}\right]$$

- *Avec*

$$\frac{1}{z+1} = \frac{1}{z} \cdot \left[\frac{1}{1 - (-\frac{1}{z})}\right] = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{z^{n+1}} \qquad \text{avec } |z| > 1$$

- *Avec*

$$\frac{1}{z+3} \quad = \quad \frac{1}{z}\cdot\left[\frac{1}{1-(\frac{-3}{z})}\right] = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{3^n}{z^{n+1}} \qquad \text{avec } |z|>3$$

Donc en tenant compte que $|z|>3$ *pour avoir convergence, alors*

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(1-3^n)}{z^{n+1}}, \qquad \text{avec } |z|>3 \\ &= \frac{1}{z^2}-\frac{4}{z^3}+\frac{13}{z^4}+\cdots \end{aligned}$$

Exemple 6.3. *Écrire le développement en série de Laurent de la fonction*

$$f(z)=e^{\frac{1}{z}}$$

qui est valide pour $|z|>0$.

Solution.
Nous avons

$$\begin{aligned} f(z)=e^{\frac{1}{z}} &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\frac{1}{z})^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!\,z^n} \\ &= 1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2z^2}+\cdots, \qquad \text{avec } |z|>0 \end{aligned}$$

Remarque.

$$\begin{aligned} 1=a_0 &= \frac{1}{2\pi i}\oint_{|w|=1}\frac{e^{1/w}}{w}\,dw \\ &= \frac{1}{2\pi i}\oint_{|w|=1}\frac{\overline{w}e^{\frac{1\overline{w}}{w\overline{w}}}}{w\overline{w}}\,dw \overset{w\overline{w}=|w|^2=1}{=} \frac{1}{2\pi i}\oint_{|w|=1}\overline{w}e^{\overline{w}}\,dw \\ \text{et comme } w &= 1\cdot e^{i\theta}, \qquad \overline{w}=e^{-i\theta}, \qquad dw=ie^{i\theta}d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{\cos(\theta)-i\sin(\theta)}d\theta \\ 1+i\cdot 0 &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{\cos(\theta)}\Big[\cos(\sin(\theta))-i\sin(\sin(\theta))\Big]d\theta \end{aligned}$$

Ainsi, par comparaison des parties réelles et imaginaires, nous avons

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^{2\pi} e^{\cos(\theta)} \cdot \cos(\sin(\theta))\, d\theta = 2\pi \\ \\ \displaystyle\int_0^{2\pi} e^{\cos(\theta)} \cdot \sin(\sin(\theta))\, d\theta = 0 \end{cases}$$

Exemple 6.4. *Écrire le développement en série de Laurent de la fonction*

$$f(z) = \frac{\sin(z)}{z^2}$$

qui est valide pour $|z| > 0$.

Solution.
Nous avons

$$\begin{aligned} f(z) = \frac{\sin(z)}{z^2} \quad &= \quad \frac{1}{z^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} \\ &= \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n-1} \qquad\qquad \text{avec } |z| > 0 \\ &= \quad \frac{1}{z} - \frac{z}{6} + \frac{z^3}{120} - \cdots \end{aligned}$$