Chapitre 7

Singularités

En mathématiques, une singularité est en général un point, une valeur ou un cas dans lequel un certain objet mathématique n'est pas bien défini. Par exemple la fonction $f(z) = \frac{1}{z}$ admet une singularité en $z = 0$. L'étude des singularités est possible en analysant la série de Laurent. Pour cela, donnons nous quelques définitions préalable.

Définition 7.1. *La partie singulière de la série de Laurent est composée de tous les termes ayant la forme* $\frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n}$. *C'est- à-dire*

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \\ &= \underbrace{\cdots + \frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{(z-z_0)^1}}_{\text{Partie singulière de la série}} + a_0 + a_1 (z-z_0)^1 + \cdots \end{aligned}$$

Définition 7.2. *Un point en lequel une fonction* $f(z)$ *cesse d'être analytique est appelé un point singulier ou une singularité de* $f(z)$.

7.1 Classement des singularités

Parmi ces singularités, nous retrouvons les pôles, les singularités essentielles et apparentes, les points isolés et les points de branchement. Regardons plus en détails comment faire la distinction entre ces singularités.

a) **Pôles.**

Supposons que le développement de Laurent de $f(z)$ soit de la forme

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=-m}^{\infty} a_n (z-z_0)^n, \qquad\qquad a_{-m} \neq 0 \\ &= \frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m} + \frac{a_{-m+1}}{(z-z_0)^{m-1}} \cdots + a_0 + a_1(z-z_0) + \cdots \\ &= \frac{1}{(z-z_0)^m}\left[a_{-m} + a_{-m+1}(z-z_0)\cdots\right] \\ \Rightarrow (z-z_0)^m f(z) &= a_{-m} + a_{-m+1}(z-z_0)\cdots \end{aligned}$$

Si on peut trouver un entier n tel que

$$\lim_{z\to z_0} (z-z_0)^n f(z) = \underbrace{A}_{a_{-m}} \neq 0$$

alors z_0 est appelé un pôle d'ordre n.

Remarquons que

$$\begin{cases} \lim_{z\to z_0} (z-z_0)^k f(z) \text{ n'existe pas pour } 0 \leq k < m \\ \lim_{z\to z_0} (z-z_0)^m f(z) = a_{-m} \neq 0 \end{cases}$$

Concrètement cela signifie que la partie singulière de la série possède un nombre fini de terme.

De manière équivalente, z_0 est un pôle si et seulement si $|f|$ tend vers l'infini en z_0.

Exemple 7.1. *La fonction* $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)^3}$ *a un pôle d'ordre 3 au point* $z_0 = 1$ *car*

$$\lim_{z\to z_0} (z-z_0)^n f(z) = \lim_{z\to 1} (z-1)^3 \frac{1}{(z-1)^3} = \lim_{z\to 1} 1 = 1 \neq 0$$

Exemple 7.2. *La fonction* $f(z) = \dfrac{\sin(z)}{z^2}$ *a un pôle d'ordre 1 au point* $z_0 = 0$ *car en sachant que*

$$\frac{\sin(z)}{z^2} = \frac{1}{z} - \frac{z}{6} + \frac{z^3}{120} - \cdots, \qquad |z| > 0$$

alors

$$\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^n f(z)=\lim_{z\to 0}(z-0)^n\left[\frac{1}{z}-\frac{z}{6}+\frac{z^3}{120}-\cdots\right]=1\neq 0$$

pour $n=1$.

b) **Singularités apparentes**

Un point z_0 est appelé une singularité apparente (effaçable) de $f(z)$ si

$$\lim_{z\to z_0} f(z),\qquad \text{existe.}$$

Exemple 7.3. *La fonction* $f(z)=\dfrac{\sin(z)}{z}$ *possède une singularité apparente en* $z_0=0$ *car*

$$\lim_{z\to 0}\frac{\sin(z)}{z}=1,\qquad \text{(existe).}$$

c) **Singularités essentielles.**

Si on peut développer $f(z)$ en série de Laurent qui est :

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-z_0)^n,\qquad 0<|z-z_0|<R,$$

avec $a_n\neq 0$ pour une infinité de $n<0$ alors on dit que z_0 est une singularité essentielle de $f(z)$.

Remarquons que puisque

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-z_0)^n \\ &= \underbrace{\cdots+\frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2}+\frac{a_{-1}}{(z-z_0)^1}}_{\text{Partie singulière de la série}}+a_0+a_1(z-z_0)^1+\cdots \end{aligned}$$

alors z_0 est une singularité essentielle lorsque

$$\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^k f(z)\ \text{ n'existe pas quelque soit } k\geq 0.$$

Concrètement z_0 est une singularité essentielle lorsque la partie singulière de la série contient un nombre infini de termes.

Exemple 7.4. *La fonction* $f(z)=e^{\frac{1}{z}}$ *a une singularité essentielle au point* $z_0=0$ *car*

$$\begin{aligned} e^{\frac{1}{z}} &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!z^n},\qquad 0<|z| \\ &= 1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2\,z^2}+\frac{1}{6\,z^3}+\cdots \end{aligned}$$

Notons que

$\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^k f(z) = \lim_{z \to 0} (z-0)^k \left[1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{6z^3} + \cdots\right]$ n'existe pas quelque soit $k \geq 0$.

d) **Point de branchement.**

Un point de branchement est une singularité qui concerne les fonctions multiformes telles que :

$$\sqrt{z}, \ln(z), \arcsin(z), \arctan(z), \text{etc.}$$

On dit alors que z_0 est un point de branchement de $f(z)$ si en parcourant une courbe fermée C quelconque entourant z_0 la fonction prend plus d'une valeur.

Notons qu'une fonction qui admet un point de branchement en z_0 peut être rendue uniforme en la restreignant à un feuillet particulier de sa surface de Riemann. Pour cela on définit une ligne, appelée **coupure**, reliant le point z_0 à un autre point de branchement de manière à empêcher que l'on puisse tourner autour de z_0 seul. La fonction ainsi restreinte est alors uniforme, c'est une branche particulière. Lorsque l'on veut faire coïncider les valeurs réelles de la restriction de f à un feuillet avec une fonction classique de la variable réelle on choisit une détermination particulière, appelée **branche principale**.

Pour donner une image, cela correspond à un escalier en colimaçon dont l'axe (réduit à un point) est placé à la singularité, desservant plusieurs (voire une infinité) d'étages. Dans le cas d'un nombre fini d'étages, l'escalier a une propriété de périodicité : arrivé au dernier étage, on peut continuer à monter et on se retrouve... au rez-de-chaussée.

En pratique, il suffit de tourner autour d'un point de branchement pour changer "d'étage ".

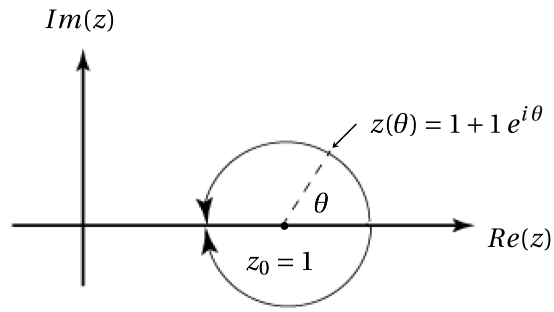
Exemple 7.5. *Le point $z_0 = 1$ est un point de branchement pour*

$$f(z) = (z-1)^{\frac{1}{2}}.$$

Pour illustrer cela prenons le contour fermé constitué du cercle

$$z(\theta) = z_0 + \rho\, e^{i\theta} = 1 + 1\, e^{i\theta}$$

entourant $z_0 = 1$



Ainsi

$$f(z) = f(1+1\cdot e^{i\theta}) = (1+1\cdot e^{i\theta}-1)^{\frac{1}{2}} = (e^{i\theta})^{\frac{1}{2}} = \begin{cases} e^{i\frac{\pi}{2}} = i & \text{si} \quad \theta = \pi \\ e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i & \text{si} \quad \theta = -\pi \end{cases}$$

Ainsi $f(z)$ change de valeur lorsque θ passe de $-\pi$ à π.

e) **Singularité isolée**
Une singularité z_0 est dite isolée si il existe un voisinage duquel il n'y a aucune autre singularité.
C'est- à- dire qu'il existe un $\delta > 0$ tel que

$$|z - z_0| < \delta$$

Exemple 7.6. *La fonction $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ possède les singularités (pôles d'ordre 1) isolés en $z_0 = 1$ et $z_1 = 2$.*
Note : Il est à noter qu'un point de branchement n'est jamais une singularité isolée.

Exemple 7.7. *Considérons la fonction*

$$f(z) = \frac{1}{\sin\left(\frac{1}{z}\right)}$$

a) *Déterminez les singularités de $f(z)$.*
b) *Déterminez la nature des singularités et précisez si elles sont isolées ou non.*

Solution.

a) $f(z) = \frac{1}{\sin\left(\frac{1}{z}\right)}$ *n'est pas définie en $z_0 = 0$, ni pour*

$$\sin\left(\frac{1}{z}\right) = 0 \;\Rightarrow\; \frac{1}{z} = n^*\pi \iff z = \frac{1}{n^*\pi} \qquad \text{avec } n^* = \pm 1, \pm 2, \cdots$$

Ainsi les singularités de f sont :

$$z_0 = 0 \qquad \text{et} \qquad z_{n^*} = \frac{1}{n^*\pi} \qquad \text{avec } n^* = \pm 1, \pm 2, \cdots$$

b) *Déterminons la nature des singularités.*

- *Pour $z_{n^*} = \frac{1}{n^*\pi}$, nous avons*

$$\begin{aligned}
\lim_{z \to z_{n^*}} (z - z_{n^*})^n f(z) &= \lim_{z \to \frac{1}{n^*\pi}} \left(z - \frac{1}{n^*\pi}\right)^n \frac{1}{\sin\left(\frac{1}{z}\right)} \\
&\overset{R-H}{=} \lim_{z \to \frac{1}{n^*\pi}} n \left(z - \frac{1}{n^*\pi}\right)^{n-1} \frac{1}{\cos\left(\frac{1}{z}\right)} \cdot (-z^2) \\
&\overset{\text{Pour } n=1}{=} \frac{1}{\cos(n^*\pi)} \cdot (-z_{n^*}^2) = \frac{1}{(-1)^{n^*}} \cdot (-z_{n^*}^2) \neq 0
\end{aligned}$$

Donc $z_{n^*} = \frac{1}{n^*\pi}$ sont des pôles d'ordre 1. De plus, ils sont isolés car en prenant $\delta = \frac{\frac{1}{n^*\pi} + \frac{1}{(n^*+1)\pi}}{2}$ il est possible d'avoir un voisinage tel que

$$|z - z_{n^*}| < \delta$$

- *Pour $z_0 = 0$, celle-ci est une singularité essentielle car il est impossible de trouver un n tel que*

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^n f(z) = \lim_{z \to 0} (z - 0)^n f(z) \neq 0$$

Remarque.
Une autre façon de montrer que le point $z_0 = 0$ *est une singularité essentielle consiste à trouver le développement en série de Laurent de* $f(z)$ *et de constater qu'il existe un nombre infini de termes de la forme* $\dfrac{a_n}{(z-z_0)^n}$.

Ainsi, en sa basant sur la série

$$\begin{aligned} \sin(w) &= w - \frac{w^3}{3!} + \frac{w^5}{5!} - \frac{w^7}{7!} + \cdots \end{aligned}$$

nous avons

$$\sin(\frac{1}{z}) = \frac{1}{z} - \frac{(\frac{1}{z})^3}{3!} + \frac{(\frac{1}{z})^5}{5!} - \frac{(\frac{1}{z})^7}{7!} + \cdots$$

alors après une longue division de $\dfrac{1}{\sin(\frac{1}{z})}$, *nous obtenons :*

$$\begin{aligned} f(z) = \frac{1}{\sin(\dfrac{1}{z})} &= z + \frac{1}{6z} + \cdots \\ &= \underbrace{\cdots\cdots + \frac{1}{6z}}_{\text{Partie singulière de la série}} + z \end{aligned}$$

Ainsi il existe une infinité de $n < 0$ *tels que* $a_n \neq 0$