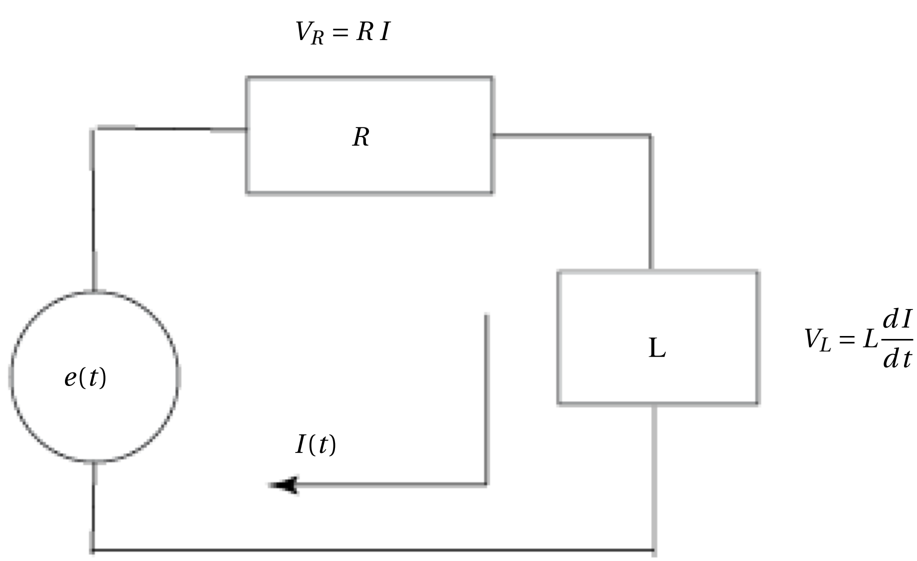
Chapitre 10

Produit de convolution

10.1 Avant-propos

Considérons un circuit électrique composé d'une résistance R, d'une inductance L connectées en série et soumis à une source de tension $e(t)$ tel qu'illustré à la figure ci-dessous.



En appliquant la loi de Kirchhoff qui dit que $\sum_i V_i = 0$, nous obtenons

$$\begin{aligned} V_L + V_R &= e(t) \\ \text{c'est-à-dire} \qquad L\frac{dI}{dt} + RI &= e(t), \qquad \text{où} \quad I = I(t). \end{aligned}$$

En résolvant cette dernière équation différentielle par la méthode de la transformée de Laplace avec la condition initiale $I(0) = 0$ nous avons alors

$$L\left[s\mathscr{L}(I(t)) - \underbrace{I(0)}_{=0}\right] + R\,\mathscr{L}(I(t)) = \mathscr{L}(e(t)).$$

Par conséquent

$$\mathscr{L}(I(t)) = \frac{\mathscr{L}(e(t))}{Ls+R} \implies I(t) = \mathscr{L}^{-1}\left(\frac{\mathscr{L}(e(t))}{Ls+R}\right)$$

Remarque importante

> Du rapport
>
> $$\frac{\mathscr{L}(I(t))}{\mathscr{L}(e(t))} = \underbrace{\frac{1}{Ls+R}}_{H(s)} \equiv H(s) \quad (\textbf{Fonction de tranfert} \text{ en s}),$$
>
> en prenant la T.Laplace inverse de $H(s)$, nous obtenons une fonction $h(t)$ en t qui est :
>
> $$h(t) = \mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{Ls+R}\right) = \frac{1}{L}e^{-\frac{R}{L}t}$$

Dans le cas particulier où :

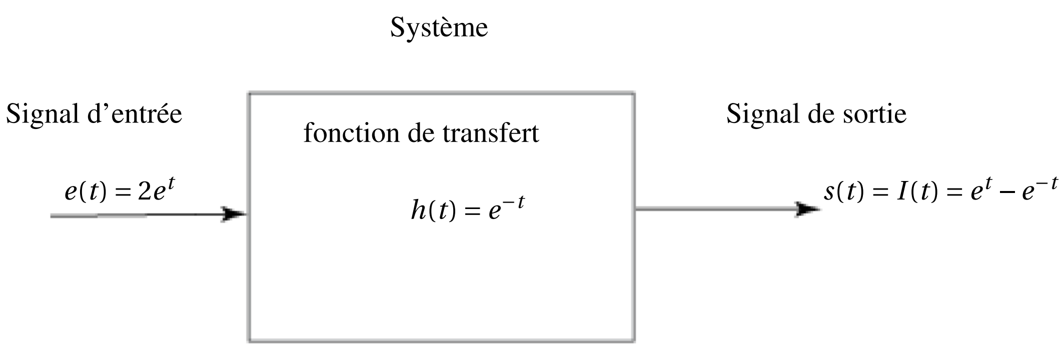
$$\begin{aligned} R &= 1\,\Omega && \text{(ohm)} \\ L &= 1\,mH && \text{(milli-Henry)} \\ e(t) &= 2\,e^t\ V && \text{(Volts)} \\ \text{nous avons} \qquad \mathscr{L}(e(t)) &= \mathscr{L}(2\,e^t) = \frac{2}{s-1} \\ \text{Ainsi} \qquad I(t) &= \mathscr{L}^{-1}\left(\frac{\mathscr{L}(e(t))}{Ls+R}\right) = \mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+1}\cdot\frac{2}{s-1}\right) = e^t - e^{-t} \\ h(t) &= e^{-t} \end{aligned}$$

⚠

La fonction $h(t)$ n'est pas simplement le rapport entre le signal de sortie et le signal d'entrée de la variable t mais plutôt celle de la variable s. C'est-à-dire

$$h(t) = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{\mathscr{L}(I(t))}{\mathscr{L}(e(t))}\right] \neq \frac{I(t)}{e(t)}$$

Représentation schématique



Définition 10.1. *Le produit de convolution de 2 fonctions $f(t)$ et $g(t)$ est définie par*

$$\boxed{(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau}$$

Le symbole $*$ signifie produit de convolution.

10.2 Technique pour effectuer un produit de convolution

La technique consiste à appliquer les 4 étapes mentionnées ci-dessous :

1e étape. Écrire la définition du produit de convolution :

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau.$$

2ᵉ étape. Déterminer respectivement les intervalles de définition : I_1 et I_2 de la variable τ, des fonctions $f(\tau)$ et $g(t-\tau)$.

3ᵉ étape. Analyse de la position de t sur l'axe τ pour déterminer $I = I_1 \cap I_2$.

4ᵉ étape. Conclusion : présentation des résultats et faire un graphe s'il y a lieu.

Exemple 10.1. *Trouvez le produit de convolution de f et g définies par*

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 2e^{t} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ e^{-t} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

Solution.

1. *Soit la définition*

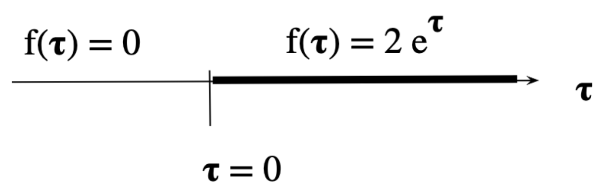
$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t-\tau)\, d\tau.$$

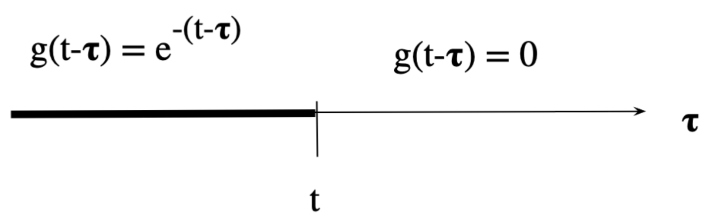
2. *Déterminons respectivement les intervalles de définition : I_1 et I_2 de la variable τ, des fonctions $f(\tau)$ et $g(t-\tau)$.*
   Ainsi

$$f(\tau) = \begin{cases} 0 & \text{si } \tau < 0 \\ 2\,e^{\tau} & \text{si } \tau \geq 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \tau \in [0, \infty[= I_1$$

$$g(t-\tau) = \begin{cases} 0 & \text{si } t-\tau < 0 \Longleftrightarrow t < \tau \Longleftrightarrow \tau > t \\ e^{-(t-\tau)} & \text{si } t-\tau \geq 0 \Longleftrightarrow t \geq \tau \Longleftrightarrow \underbrace{\tau \leq t}_{I_2} \end{cases}$$

Résumons le tout :





3. *Analyse de la position de t sur l'axe τ pour déterminer $I = I_1 \cap I_2$.*

- $\boxed{Si\ t < \underbrace{0}_{\tau}.}$ *(Ici t est à gauche de $\tau = 0$) donc $I = I_1 \cap I_2 = \emptyset$*

$$\begin{aligned} f(\tau) &= 0 \\ g(t-\tau) &= e^{-(t-\tau)} \\ \Rightarrow \quad (f \star g)(t) &= 0 \end{aligned}$$

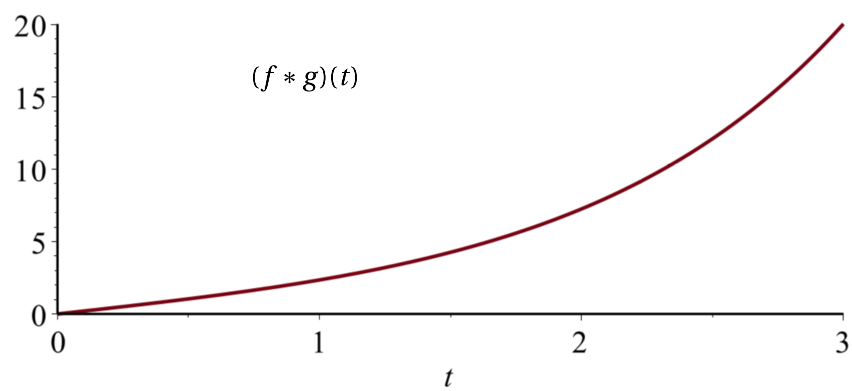
- $\boxed{Si\ t \geq 0.}$ $I = I_1 \cap I_2 = [0, t]$.

$$\begin{aligned} f(\tau) &= 2\,e^{\tau} \\ g(t-\tau) &= e^{-(t-\tau)} \\ \Rightarrow (f \star g)(t) &= \int_0^t 2\,e^{\tau}\,e^{-(t-\tau)}\,d\tau = e^t - e^{-t} \end{aligned}$$

4. *Présentation des résultats.*

$$(f * g)(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < 0 \\ e^t - e^{-t} & \text{si} \quad t \geq 0 \end{cases}$$

Notons que $(f * g)(t) = I(t)$, le signal de sortie du circuit $R - L$ traité ci-haut.



Exemple 10.2. *Trouvez le produit de convolution de f et g définies par*

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < 0 \\ e^{-t} & \text{si} \quad t \geq 0 \end{cases}$$

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < 0 \\ t & \text{si} \quad 0 \leq t < T_0, \end{cases} \qquad \text{où} \quad T_0 \in \mathbb{R}^+$$

Solution.

1. *Écrivons la définition du produit de convolution :*

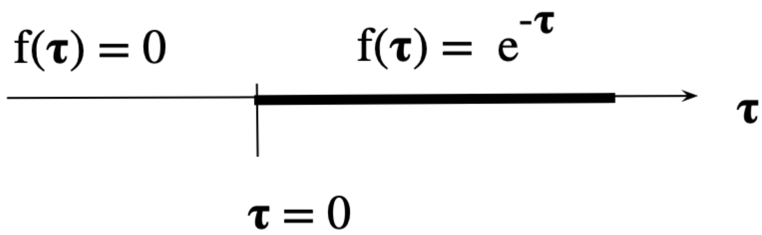
$$(f \star g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t-\tau)\, d\tau.$$

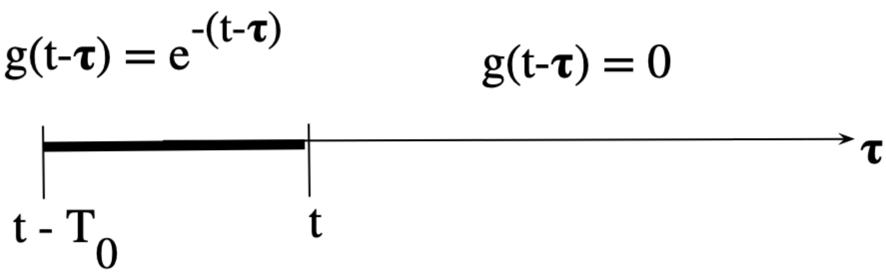
2. *Déterminons respectivement les intervalles I_1 et I_2 de la variable τ, des fonctions f et g.*
Ainsi

$$f(\tau) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \tau < 0 \\ e^{-\tau} & \text{si} \quad \tau \geq 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \tau \in [0, \infty[= I_1$$

$$g(t-\tau) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t-\tau < 0 \Longleftrightarrow t < \tau \Longleftrightarrow \tau > t \\ t-\tau & \text{si} \quad 0 \leq t-\tau < T_0 \Longleftrightarrow -t \leq -\tau < T_0 - t \Longleftrightarrow \underbrace{t - T_0 < \tau \leq t}_{I_2} \\ & \end{cases}$$

Résumons le tout :





3. *Analyse de la position de t sur l'axe τ pour déterminer $I = I_1 \cap I_2$.*

- $\boxed{Si\ t < \underbrace{0}_{\tau}.}$ *(Ici t est à gauche de $\tau = 0$) donc $I = I_1 \cap I_2 = \emptyset$*

$$\begin{aligned} f(\tau) &= 0 \\ \Rightarrow \ (f \star g)(t) &= 0 \end{aligned}$$

- $\boxed{Si\ 0 \leq t < T_0.}$ *(car $t - T_0 < 0$) alors $I = I_1 \cap I_2 = [0, t]$.*

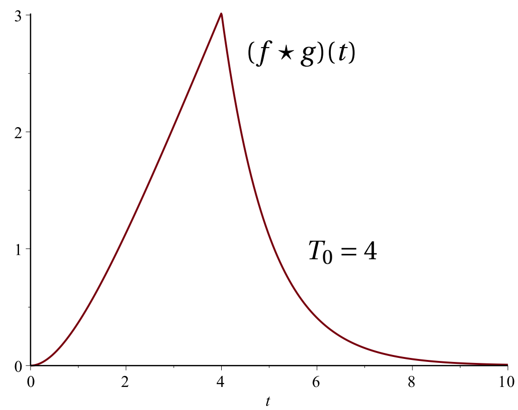
$$\begin{aligned} f(\tau) &= e^{-\tau} \\ g(t-\tau) &= t-\tau \\ \Rightarrow (f \star g)(t) &= \int_0^t e^{-\tau}\,(t-\tau)\,d\tau = e^{-t} + t - 1 \end{aligned}$$

- $\boxed{Si\ \ t \geq T_0.}$ *(car $t - T_0 > 0$) alors $I = I_1 \cap I_2 =]t - T_0, t]$.*

$$f(\tau) = e^{-\tau}$$
$$g(t-\tau) = t-\tau$$
$$\Rightarrow (f \star g)(t) = \int_{t-T_0}^{t} e^{-\tau}\,(t-\tau)\,d\tau = e^{-t+T_0}T_0 - e^{-t+T_0} + e^{-t}$$

Conclusion.

$$(f \star g)(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < 0 \\ e^{-t} + t - 1 & \text{si} \quad 0 \leq t < T_0 \\ e^{-t+T_0}(T_0 - 1) + e^{-t} & \text{si} \quad t \geq T_0 \end{cases}$$



Propriétés de la convolution

Si f, g et h sont des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et δ est l'impulsion de Dirac, alors nous avons les propriétés suivantes :

1. $f * g = g * f$ (commutativité)
   Preuve :

$$\begin{aligned}
(f*g)(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau \overset{u=t-\tau}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f(t-u)\, g(u)\, du \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} g(u)\, f(t-u)\, du \\
&= (g*f)(t)
\end{aligned}$$

2. $(f*g)*h = f*(g*h)$ (associativité)
3. $f * \delta = f$ (ici δ est appelé l'élément neutre)
   Preuve :

$$(f*\delta)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\, \delta(t-\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)\, \delta(\tau-0)\, d\tau = f(t-\tau)\Big|_{\tau=0} = f(t)$$