Chapitre 14

Transformée en Z

La transformée en Z est l'analogue discret de la transformée de Laplace. Comme la transformée de Laplace peut servir à résoudre des équations différentielles, la transformée en Z permet de trouver la valeur de suite définies par une relation de récurrence . Par exemple :

$$f(n+2) + f(n+1) + f(n) = \sin(n) \qquad \text{sachant que } f(0) = 2.$$

Plus généralement, la transformée en Z a les mêmes applications pour les signaux à temps discret que la transformée de Laplace pour les signaux à temps continu.

14.1 Transformée en Z.

Pour établir la transformée en Z, basons-nous sur la transformée de Laplace (unilatérale) dans le domaine continu qui est définie par

$$F(s) = \int_{0^+}^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt. \tag{14.1.1}$$

Alors en substituant, dans l'expression (14.1.1), les termes suivants

$$\begin{array}{rcl} t & \to & n\,T,\ \text{(n est une valeur entière et } T \text{ est la période d'échantionnage.} \\ & & \qquad\text{Pour simplifier prenons } T=1) \\ dt & \to & dn = 1,\ \text{(distance entre 2 valeurs entières)} \\ f(t) & \to & f(n),\ \text{(une suite de valeurs)} \\ s & \to & x + i\,y, \\ e^{-st} & \to & e^{-sn} = e^{-(x+i\,y)n} = \Big[\underbrace{e^{x+iy}}_{=z}\Big]^{-n} = z^{-n}, \\ \displaystyle\int_{0^+}^{\infty} & \to & \displaystyle\sum_{0}^{\infty} \end{array}$$

nous obtenons la transformée en z dans le domaine discret qui est donnée par la définition suivante.

Définition 14.1. *Considérons la suite $f(n)$ définie pour $n \geq 0$. La transformée en z (unilatérale) de la suite $f(n)$, notée $Z\Big(f(n)\Big)$ ou $F(z)$, est définie par :*

$$\boxed{Z\Big(f(n)\Big) \overset{\text{déf}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} f(n)\, z^{-n} = F(z)}$$

Exemple 14.1. *Soit la suite $f(n) = c$, où $n \geq 0$ avec $c \in \mathbb{R}$. Alors*

$$\begin{aligned} Z\Big(f(n)\Big) &= \sum_{n=0}^{\infty} c\, z^{-n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c\left(\frac{1}{z}\right)^n \text{ et par la série géo : } \sum_{n=0}^{\infty} a\, r^n = \frac{a}{1-r} \quad \text{si } |r| < 1 \\ &= c\,\frac{z}{z-1}, \quad \text{si } |z| > 1 \end{aligned}$$

D'où

$$\boxed{Z\Big(c\Big) = c\,\frac{z}{z-1}, \qquad |z| > 1}$$

Exemple 14.2. *Soit la suite $f(n) = c^n$, où $n \geq 0$ avec $c \in \mathbb{R}$. Alors*

$$\begin{aligned} Z\Big(f(n)\Big) &= \sum_{n=0}^{\infty} c^n\, z^{-n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{c}{z}\right)^n \text{ et par la série géo : } \sum_{n=0}^{\infty} a\, r^n = \frac{a}{1-r} \quad \text{si } |r| < 1 \\ &= \frac{z}{z-c}, \quad \text{si } |z| > |c| \end{aligned}$$

D'où

$$\boxed{Z\left(c^n\right) = \frac{z}{z-c}, \qquad |z| > |c|}$$

Exemple 14.3. *Soit la fonction de Heaviside (fonction échelon) définie par*

$$u(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t < 0 \\ 1, & \text{si } t \geq 0. \end{cases}$$

Définissons la suite

$$f(n) = u(n) = \begin{cases} 0, & \text{si } n < 0 \\ 1, & \text{si } n \geq 0. \end{cases}$$

Alors

$$\begin{aligned} Z\left(f(n)\right) = Z\left(u(n)\right) &= \sum_{n=0}^{\infty} u(n)\, z^{-n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{z})^n \text{ et par la série géo : } \sum_{n=0}^{\infty} a\, r^n = \frac{a}{1-r} \text{ si } |r| < 1 \\ &= \frac{z}{z-1}, \quad \text{si } |z| > 1 \end{aligned}$$

Exemple 14.4. *Soit la suite $f(n) = u(n-m)$, obtenue de l'exemple précédent en substituant n par $n-m$. Alors*

$$f(n) = u(n-m) = \begin{cases} 0, & \text{si } n < m \\ 1, & \text{si } n \geq m. \end{cases}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} Z\left(f(n)\right) &= \sum_{n=0}^{\infty} u(n-m)\, z^{-n} \\ &= \sum_{n=0}^{m-1} \underbrace{u(n-m)}_{=0}\, z^{-n} + \sum_{n=m}^{\infty} \underbrace{u(n-m)}_{=1}\, z^{-n} \\ &= \sum_{n=m}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n \text{ en posant } n^* = n - m \\ &= \sum_{n^*=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^{n^*+m} = \left(\frac{1}{z}\right)^m \sum_{n^*=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^{n^*} \text{ et par la série géo :} \\ &= \frac{z^{1-m}}{z-1}, \ |z| > 1 \end{aligned}$$

Exemple 14.5. *Soit la fonction $f(t) = t$. Ainsi, définissons la suite $f(n) = n$, où $n \geq 0$. Alors*

$$
\begin{aligned}
Z\Big(f(n)\Big) &= \sum_{n=0}^{\infty} n\, z^{-n} = \frac{-z}{-z} \sum_{n=0}^{\infty} n\, z^{-n} \\
&= \frac{-z}{1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{-z}\, nz^{-n} = \frac{-z}{1} \sum_{n=0}^{\infty} -\, nz^{-n-1} \\
&= -z \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dz}\Big[z^{-n}\Big] \\
&= -z\, \frac{d}{dz}\Big[\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} z^{-n}}_{=\frac{z}{z-1}}\Big] = -z\, \frac{d}{dz}\Big[\frac{z}{z-1}\Big] = -z\, \frac{-1}{(z-1)^2} \\
&= \frac{z}{(z-1)^2}, \quad \text{si } |z| > 1.
\end{aligned}
$$

Exemple 14.6. *Trouvez la transformée en z de la suite*

$$\begin{cases} f(0) = 0, \text{ si } \ n = 0 \\ f(n) = \dfrac{1}{n}, \text{ si } \ n = 1, 2, 3, \ldots. \end{cases}$$

Solution

Rappel :

$$\begin{aligned}
\ln(1-x) &= -\left[x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \cdots\right], \qquad -1 \le x < 1 \iff |x| < 1 \\
\text{Remplacons } x \to &\ \tfrac{1}{z} \\
\ln\left(1 - \frac{1}{z}\right) &= -\left[\frac{(\frac{1}{z})}{1} + \frac{(\frac{1}{z})^2}{2} + \frac{(\frac{1}{z})^3}{3} + \frac{(\frac{1}{z})^4}{4} + \cdots\right]. \qquad |z| > 1 \\
\ln\left(\frac{z-1}{z}\right) &= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{1}{z}\right)^n \\
\text{D'où} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{1}{z}\right)^n &= \ln\left(\frac{z}{z-1}\right)
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
Z\Big(f(n)\Big) &= \sum_{n=0}^{\infty} f(n)\, z^{-n} = \underbrace{f(0)}_{=0} z^{-0} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\, z^{-n} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{1}{z}\right)^n \\
&= \ln\left(\frac{z}{z-1}\right) \ \text{ si } |z| > 1.
\end{aligned}$$

Propriétés de la transformée en z.

P.1 Linéarité.

$$\boxed{Z\Big(c_1\, f_1(n) + c_2\, f_2(n)\Big) = c_1\, Z\Big(f_1(n)\Big) + c_2\, Z\Big(f_2(n)\Big)}$$

P.2 Translation.

$$\boxed{Z\Big(f(n+m)\Big) = z^m\Big(F(z) - \sum_{k=0}^{m-1} f(k)\, z^{-k}\Big), \quad m = 1, 2, 3\ldots}$$

Preuve.

$$\begin{aligned}
Z\Big(f(n+m)\Big) &= \sum_{n=0}^{\infty} f(n+m)\, z^{-n}. \text{ Posons } k = n+m \\
&= z^m \Big(\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} f(k)\, z^{-k}}_{=F(z)} - \sum_{k=0}^{m-1} f(k)\, z^{-k}\Big) \\
&= z^m\Big(F(z) - \sum_{k=0}^{m-1} f(k)\, z^{-k}\Big)
\end{aligned}$$

□

P.3 Décalage.

$$\boxed{Z\Big(f(n-m)\ \cdot u(n-m)\Big) = z^{-m} F(z)}$$

Preuve.

$$\begin{aligned}
Z\Big(f(n-m)\, u(n-m)\Big) &= \sum_{n=0}^{\infty} f(n-m)\, u(n-m)\, z^{-n} \\
&= \sum_{n=0}^{m-1} f(n-m)\, \underbrace{u(n-m)}_{=0}\, z^{-n} + \sum_{n=m}^{\infty} f(n-m)\, \underbrace{u(n-m)}_{=1}\, z^{-n} \\
&= \sum_{n=m}^{\infty} f(n-m)\, z^{-n} \quad \text{et en posant } n^* = n-m \\
&= \sum_{n^*=0}^{\infty} f(n^*)\, z^{(-n^*-m)} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} f(n)\, z^{(-n-m)} \\
&= z^{-m}\, F(z)
\end{aligned}$$

$\square$

P.4 Multiplication par une exponentielle.

$$\boxed{Z\left(e^{-a\,n} f(n)\right) = F(e^a z)}$$

Preuve.

$$\begin{aligned} Z\left(e^{-a\,n} f(n)\right) = &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(e^{-a\,n} f(n)\right) z^{-n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} f(n)(e^a z)^{-n} = F(e^a z) \end{aligned}$$

$\square$

P.5 Théorème de la valeur initiale.

$$\boxed{\lim_{|z|\to\infty} F(z) = f(0)}$$

Notons qu'en posant $z = a + i\,b$ alors $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$. Donc pour obtenir $|z| \to \infty$, il suffit de prendre $b = 0$ et $a = \infty$ ou bien $a = 0$ et $b = \infty$. Ainsi

$$\lim_{|z|\to\infty} F(z) = \lim_{\sqrt{a^2+b^2}\to\infty} F(z)$$

Preuve.

$$\begin{aligned} F(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} f(n)\, z^{-n} \\ &= f(0) + \frac{f(1)}{z} + \frac{f(2)}{z^2} + \frac{f(3)}{z^3} + \cdots \\ \lim_{|z|\to\infty} F(z) &= f(0) + 0 + 0 + \cdots \\ &= f(0) \end{aligned}$$

$\square$

P.6 Théorème de la valeur finale.

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} f(n) = \lim_{z\to 1} (z-1)\, F(z)}$$

Preuve.

$$
\begin{aligned}
(z-1)\,F(z) &= z\,F(z) - F(z)\\
&= \sum_{n=0}^{\infty} f(n)\,z^{-n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} f(n)\,z^{-n}\\
&= f(0)\cdot z + \sum_{n=1}^{\infty} f(n) z^{-n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} f(n)\,z^{-n}\\
&= f(0)\cdot z + \sum_{n=0}^{\infty} \Big[f(n+1) - f(n) \Big] z^{-n}\\
\lim_{z\to 1}(z-1)\,F(z) &= f(0)\cdot 1 + \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N-1} \Big[f(n+1) - f(n) \Big]\\
&= f(0) + \lim_{N\to\infty} \Big[(f(1)-f(0)) + (f(2)-f(1))\\
&\quad + (f(3)-f(2)) \cdots + (f(N) - f(N-1)) \Big]\\
&= f(0) + \lim_{N\to\infty} \Big[f(N) - f(0) \Big]\\
&= \lim_{N\to\infty} f(N).
\end{aligned}
$$

□

P.7 Convolution.

La convolution est très utilisée en analyse des signaux et en traitement d'image. Par exemple, elle permet de relier un signal d'entré $E(n)$ et le signal de sortie $S(n)$ via la fonction de transfert $H(n)$ d'un système. C'est-à-dire

$$E(n) \overset{\mathrm{H(n)}}{- - - - -} > S(n) = E(n) * H(n)$$

Définition 14.2. *La convolution de 2 suites $f_1(n)$ et $f_2(n)$ avec $n = 0, 1, 2\cdots$ est une suite, notée $(f_1 \star f_2)(n)$, définie par*

$$\boxed{(f_1 * f_2)(n) = \sum_{k=0}^{n} f_1(k)\, f_2(n-k).}$$

Ainsi, si $Z\Big(f_1(n)\Big) = F_1(z)$ et $Z\Big(f_2(n)\Big) = F_2(z)$ alors

$$\boxed{Z\Big((f_1 * f_2)(n)\Big) = F_1(z)\, F_2(z)}$$

Preuve.

$$\begin{aligned}
F_1(z)\cdot F_2(z) &= \Big[\sum_{k=0}^{\infty} f_1(k) z^{-k}\Big] F_2(z) \overset{\text{On distribue } F_2 \text{ à la somme}}{\overset{\uparrow}{=}} \sum_{k=0}^{\infty} f_1(k) \underbrace{z^{-k} F_2(z)}_{\text{Ici utilisons P.3}} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} f_1(k) \underbrace{Z(f_2(n-k)u(n-k)}_{=\sum_{n=0}^{\infty} f_2(n-k)u(n-k)\, z^{-n}} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} f_1(k) \sum_{n=0}^{\infty} f_2(n-k)u(n-k)\ z^{-n} (\text{ Distribuons la 1 ere sommation}) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \Big[\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} f_1(k)\, f_2(n-k)u(n-k)}_{\text{Ici Posons } n^* = n-k}\Big]\ z^{-n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \Big[\sum_{n^*=n}^{-\infty} f_1(n-n^*) f_2(n^*)\ u(n^*)\Big] z^{-n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \Big[\sum_{n^*=-\infty}^{n} f_1(n-n^*) f_2(n^*) \quad \underbrace{u(n^*)}_{=1,\ \text{pour } n^* \geq 0} \quad \Big] z^{-n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \Big[\quad \underbrace{\sum_{n^*=0}^{n} f_1(n-n^*) f_2(n^*)}_{\text{Posons } n^*=k,\ \text{car } n^* \text{est une variable muette}} \quad \Big] z^{-n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (f_1 \star f_2)(n)\, z^{-n} \\
&= Z\Big((f_1 \star f_2)(n)\Big)
\end{aligned}$$

Ainsi

$$F_1(z)\cdot F_2(z) = Z\Big((f_1 \star f_2)(n)\Big)$$

□

P.8 Multiplication par la variable d'évolution.

$$\boxed{Z(nf(n)) = -z\,F'(z).}$$

Preuve.
Nous avons

$$\begin{aligned}
Z(nf(n)) &= \sum_{n=0}^{\infty} nf(n)z^{-n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-z}{1}\,\underbrace{\frac{nf(n)z^{-n}}{-z}}_{=\frac{d}{dz}(f(n)z^{-n})} \\
&= -z\,\frac{d}{dz}\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} f(n)z^{-n}}_{=Z(f(n)=F(z)} \\
&= -z\,F'(z).
\end{aligned}$$

□

Exemple 14.7. *Trouvez* $Z\Big(n(n+1)f(n)\Big)$.
Solution

$$\begin{aligned}
Z\Big(n\,\underbrace{(n+1)f(n)}_{g(n)}\Big) \underbrace{=}_{Par\,P.8}\; & -z\,G'(z) \\
= \;& -z\frac{d}{dz}\Big[Z\Big(g(n)\Big)\Big] = -z\frac{d}{dz}\Big[Z\Big((n+1)f(n)\Big)\Big] \\
= \;& -z\frac{d}{dz}\Big[\underbrace{Z\Big(nf(n)\Big)}_{Par\,P.8} + \underbrace{Z\Big(f(n)\Big)}_{=F(z)}\Big] \\
= \;& -z\frac{d}{dz}\Big[-z\,F'(z) + F(z)\Big] \\
= \;& -z\frac{d}{dz}\Big[-z\,F''(z) + \underbrace{F'(z)(-1) + F'(z)}_{=0}\Big] \\
= \;& z^2\,F''(z)
\end{aligned}$$

PROPRIÉTÉS DE LA TRANSFORMÉE EN Z

- $Z\Big(f(n)\Big) \overset{\text{déf}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} f(n) z^{-n} = F(z)$.
- Fonction Heaviside :

$$u(n-m) = \begin{cases} 0 & \text{si } n < m \\ 1 & \text{si } n \geq m \end{cases}$$

P.1 Linéarité.

$$Z\Big(c_1 f_1(n) + c_2 f_2(n)\Big) = c_1 Z\Big(f_1(n)) + c_2 Z(f_2(n)\Big)$$

P.2 Translation.

$$Z\Big(f(n+m)\Big) = z^m \left(F(z) - \sum_{k=0}^{m-1} f(k) z^{-k}\right)$$

P.3 Décalage.

$$Z\Big(f(n-m)\, u(n-m)\Big) = z^{-m} F(z)$$

P.4 Multiplication par une exponentielle.

$$Z\Big(e^{-an} f(n)\Big) = F(e^a z)$$

P.5 Théorème de la valeur initiale.

$$\lim_{z \to \infty} F(z) = f(0)$$

P.6 Théorème de la valeur finale. $\lim_{n \to \infty} f(n) = \lim_{z \to 1} (z-1)\, F(z)$

P.7 Convolution.

La convolution de 2 suites : $f_1(n)$ et $f_2(n)$ où $n \geq 0$ est définie par

$$(f_1 \star f_2)(n) = \sum_{k=0}^{n} f_1(k)\, f_2(n-k).$$

Alors en désignant $Z\Big(f_1(n)\Big) = F_1(z)$ et $Z\Big(f_2(n)\Big) = F_2(z)$, nous avons

$$Z\Big((f_1 \star f_2)(n)\Big) = F_1(z)\, F_2(z)$$

P.8 Multiplication par la variable d'évolution.

$$Z\Big(n f(n)\Big) = -z F'(z)$$

TABLE DE TRANSFORMÉE EN Z

$$Z(f(n)) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)\, z^{-n} = F(z)$$

$$u(n-m) = \begin{cases} 0, & \text{si } n < m \\ 1, & \text{si } n \geq m \end{cases}, \qquad \delta(n) = \begin{cases} 1, & \text{si } n = 0 \\ 0, & \text{si } n = 1,2,3,\ldots. \end{cases}$$

#	$f(n)$	$F(z)$	Condition d'utilisation
1	$c\,\delta(n)$	c	$\lvert z\rvert > 0$
2	c u(n)	$c\,\dfrac{z}{z-1}$	$\lvert z\rvert > 1$
3	c^n	$\dfrac{z}{z-c}$	$\lvert z\rvert > c$
4	$u(n-m)$	$\dfrac{z^{1-m}}{z-1}$	$\lvert z\rvert > 1$
5	n	$\dfrac{z}{(z-1)^2}$	$\lvert z\rvert > 1$
6	$n\,u(n)$	$\dfrac{z}{(z-1)^2}$	$\lvert z\rvert > 1$
7	$n\,c^n\,u(n)$	$\dfrac{c\,z}{(z-c)^2}$	$\lvert z\rvert > \lvert c\rvert$
8	$n\,f(n)$	$-z\,F'(z)$	Selon $F(z)$
9	$n(n+1)\,f(n)$	$z^2\,F''(z)$	Selon $F(z)$

14.2 Applications aux équations de récurrence

La transformée en Z permet de résoudre facilement des équations aux différences linéaires. En d'autres termes, de déterminer facilement le terme général d'une suite vérifiant une relation de récurrence linéaire.

Exemple 14.8. *À l'aide de la transformée en Z, déterminez le terme général $f(n)$ de la suite définie par l'équation de récurrence :*

$$\begin{cases} f(0) = 3, & \\ f(n+1) = f(n) + 2, & \text{si} \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots. \end{cases}$$

Solution.

Notons $F(z)$ la transformée en Z de $f(n)$. En appliquant cette transformée aux deux membres de l'équation on obtient :

$$Z(f(n+1)) = Z(f(n)) + Z(2)$$

Ainsi par la propriété P.2 avec $m = 1$, nous avons

$$z(F(z) - 3) = F(z) + 2\frac{z}{z-1}$$

ce qui donne

$$F(z) \quad = \quad 3\frac{z}{(z-1)} + 2\frac{z}{(z-1)^2}$$

Et par la table des T. en Z ci-dessus, on en déduit

$$f(n) = (3 + 2\,n)u(n) \qquad u \text{ étant la fonction échelon.}$$

D'où

$$f(n) = 2\,n + 3 \qquad \text{pour } n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Exemple 14.9. *En considérant $\delta(n)$ l'impulsion unité définie par*

$$\delta(n) = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad n = 0 \\ 0, & \text{si} \quad n \neq 0, \end{cases}$$

résoudre l'équation de récurrence :

$$\begin{cases} f(0) = 0, & \\ f(1) = 0, & \\ f(n+2) - 3f(n+1) + 2f(n) = \delta(n), & \text{si} \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots. \end{cases}$$

Solution.
Notons $F(z)$ la transformée en Z de $f(n)$. Ainsi en appliquant cette transformée aux deux membres de l'équation on obtient :

$$Z(f(n+2)) - 3Z(f(n+1)) + 2Z(f(n)) = \underbrace{Z(\delta(n))}_{=\sum_{n=0}^{\infty}\delta(n)z^{-n}=1}$$

$$z^2F(z) - 3zF(z) + 2F(z) = 1$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}
F(z) &= \frac{1}{(z-1)(z-2)} \\
&= \frac{-1}{(z-1)} + \frac{1}{(z-2)} \\
&= \underbrace{z^{-1}}_{z^{-m}}\underbrace{\frac{-z}{(z-1)}}_{=F_1(z)} + \underbrace{z^{-1}}_{z^{-m}}\underbrace{\frac{z}{(z-2)}}_{=F_2(z)}
\end{aligned}$$

et par la propriétée P3 (décalage) on a :

avec $m = 1$

$$f_1(n) = -(1)^n = -1 \Rightarrow f_1(n - \underbrace{m}_{=1}) = f_1(n-1) = -1$$

$$f_2(n) = (2)^n \Rightarrow f_2(n - \underbrace{m}_{=1}) = f_2(n-1) = 2^{n-1}$$

on en déduit

$$f(n) = \left(-1 + 2^{n-1}\right) u(n-1)$$ u étant la fonction échelon.

Notons que :

$$f(n) = \begin{cases} 0, & \text{si } n = 0 \\ 0, & \text{si } n = 1 \\ -1 + 2^{n-1}, & \text{si } n = 2, 3, 4, \ldots \end{cases}$$