Chapitre 16

Séries de Fourier

Un peu d'histoire.

Jean Baptiste Joseph Fourier est un mathématicien et physicien français né le 21 mars 1768 à Auxerre et mort le 16 mai 1830 à Paris. Il est connu pour ses travaux sur la décomposition de fonctions périodiques en séries trigonométriques convergentes appelées séries de Fourier et leur application au problème de la propagation de la chaleur.
De son vivant, Fourier est conscient de l'universalité de sa théorie et des domaines d'application de ses outils : vibrations, acoustique, électricité, etc. Le développement de ces domaines d'applications aboutira au XX^e siècle à la naissance du traitement du signal.

FIGURE 16.1: Joseph Fourier 1768-1830

Contrairement aux séries de Taylor qui permettent d'approximer localement une fonction, les séries de Fourier permettent d'approximer une fonction périodique sur tout un intervalle.

Définition 16.1. *Une fonction $f(x)$ est dite **périodique** de période p si $\forall x \in \mathbb{R}$, nous avons*

$$f(x+p) = f(x), \qquad \text{où } p > 0.$$

Et de façon plus générale :

$$f(x+n\,p) = f(x) \qquad \text{où } n = 1, 2, 3\ldots$$

Exemple 16.1. *Considérons la fonction $f(x) = \cos(x)$.*

a) Trouvez la plus petite période p de la fonction $f(x) = \cos(x)$.

b) Calculez $\cos(41\pi)$.

Solution.

a) Par les relations :

$$\begin{cases} f(x+p) &= f(x) \\ \cos(A \pm B) &= \cos(A)\cos(B) \mp \sin(A)\sin(B) \end{cases}$$

nous avons

$$\begin{aligned} f(x+p) &= f(x) \\ \cos(x+p) &= \cos(x) \\ \cos(x)\cos(p) - \sin(x)\sin(p) &= 1\cos(x) + 0\sin(x) \qquad (16.0.1) \end{aligned}$$

Par comparaison du membre de gauche et de droite de 16.0.1 *, nous avons :*

$$\begin{cases} \cos(p) = 1 : \Rightarrow p = 2\pi, 4\pi, \ldots \\ \sin(p) = 0 : \Rightarrow p = \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi, \ldots \end{cases}$$

*Ainsi, la plus petite période, appelé **période fondamentale**, est $p = 2\pi$.*

b) Par la relation $f(x+n\,p) = f(x)$, on a

$$\cos(41\pi) = f(\underbrace{\pi}_{=x} + \underbrace{20}_{=n}\underbrace{2\pi}_{=p}) = f(\underbrace{\pi}_{=x}) = \cos(\pi) = -1$$

16.1 Hypothèses pour exprimer une fonction $f(x)$ sous la forme d'une série de Fourier

Toute fonction périodique peut être représentée par une série de Fourier à condition ;

1. Qu'il y ait un nombre fini de discontinuités sur l'intervalle $[x, x+p]$. Cela dans le cas où la fonction $f(x)$ est discontinue.
   La fonction

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \rightarrow \text{si } x \text{ est de la forme } \frac{a}{b} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \rightarrow \pi, \sqrt{2}, \dfrac{\pi}{2}, \ldots \end{cases}$$

   possède un nombre infini de discontinuités sur l'intervalle $[x, x+p]$, donc elle n'est pas développable en série de Fourier.
2. Qu'il y ait une valeur moyenne finie de $f(x)$, notée f_{moy}, sur l'intervalle $[x, x+p]$.
   Notons que la valeur moyenne d'une fonction est :

$$f_{\text{moy}} = \frac{1}{p} \int_x^{x+p} f(x)\, dx.$$

   La valeur moyenne finie de la fonction $f(x) = \tan(x)$ n'existe pas sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ car

$$\begin{aligned}
f_{\text{moy}} &= \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \tan(x)\, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\, dx \\
&= \frac{1}{\pi} \Big[\lim_{A \to -\frac{\pi}{2}} \int_A^0 \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\, dx + \lim_{B \to \frac{\pi}{2}} \int_0^B \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\, dx \Big] \\
&= \frac{-1}{\pi} \Big[\lim_{A \to -\frac{\pi}{2}} \ln\Big(\Big|\cos(x)\Big|\Big)\Big]_A^0 + \lim_{B \to \frac{\pi}{2}} \ln\Big(\Big|\cos(x)\Big|\Big)\Big]_0^B \Big] \\
&= \frac{-1}{\pi} \Big[\lim_{A \to -\frac{\pi}{2}} \Big(\underbrace{\ln(1)}_{=0} - \ln\Big(\Big|\cos(A)\Big|\Big)\Big) + \lim_{B \to \frac{\pi}{2}} \Big(\ln\Big(\Big|\cos(B)\Big|\Big) - \underbrace{\ln(1)}_{=0}\Big]\Big] \\
&= \frac{-1}{\pi} \Big[\underbrace{\lim_{A \to -\frac{\pi}{2}} \Big(-\ln\Big(\Big|\cos(A)\Big|\Big)\Big)}_{=+\infty} + \underbrace{\lim_{B \to \frac{\pi}{2}} \Big(\ln\Big(\Big|\cos(B)\Big|\Big)\Big)}_{=-\infty} \Big] \quad \text{est indéfinie sur } \mathbb{R}
\end{aligned}$$

3. Qu'il y ait un un nombre fini de maxima positifs et négatifs locaux dans l'intervalle $[x, x+p]$.

Lorsque toutes ces conditions , appelées **conditions de Dirichlet** , sont satisfaites la série de Fourier de $f(x)$ existe et peut être écrite soient sous forme trigonométrique ou d'exponentielle complexe.

16.2 Forme trigonométrique

Considérons une fonction $f(x)$ périodique ayant une période $p = 2L$. L étant appelée la demi-période. Alors la série de Fourier (forme trigonométrique) de $f(x)$, notée $SF(x)$, est définie par

$$f(x) = \underbrace{\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi\, x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi\, x}{L}\right) \right]}_{=SF(x)} \tag{16.2.2}$$

où

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\, dx \\ a_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\, \cos\left(\frac{n\,\pi\, x}{L}\right)\, dx \\ b_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\, \sin\left(\frac{n\,\pi\, x}{L}\right)\, dx \end{aligned}$$

Remarque.

- On peut remplacer $[-L, L]$ par n'importe quel intervalle de la forme $[-L + c, L + c]$ où $c \in \mathbb{R}$. On prend souvent l'intervalle $[0, 2L]$.
- La valeur moyenne d'une fonction $f(x)$, notée $f_{moy}(x)$, sur l'intervalle $[a, b]$ étant définie par :

$$f_{moy}(x) = \frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x)\, dx$$

alors

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2}\Big[\frac{1}{L}\underbrace{\int_{-L}^{L} f(x)\, dx}_{=2Lf_{moy}(x)}\Big] = f_{moy}(x)$$

Cela signifie que le coefficient $\frac{a_0}{2}$ est la moyenne de la fonction $f(x)$ sur une période p.

Cas particuliers

Soit l'intervalle symétrique $]-L, L[$.

- Si $f(x)$ est une fonction impaire ($f(-x) = -f(x)$), alors

$$\begin{aligned} a_0 &= 0 \\ a_n &= 0 \\ b_n &= \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\, \sin\left(\frac{n\pi\, x}{L}\right)\, dx \end{aligned}$$

La série de Fourier sinus d'une fonction $f(x),\ 0 < x < L$, est

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

- Si $f(x)$ est une fonction paire ($f(-x) = f(x)$), alors

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\,dx \\ a_n &= \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\,dx \\ b_n &= 0 \end{aligned}$$

La série de Fourier cosinus d'une fonction $f(x),\ 0 < x < L$, est

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

16.3 Forme exponentielle complexe

Sous forme exponentielle complexe, la série de Fourier $SF(x)$, voir (16.2.2), s'écrit

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\, e^{i\frac{n\pi x}{L}} \qquad \text{où} \qquad c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\, e^{-i\frac{n\pi x}{L}}\,dx}$$

Preuve
Utilisons la formule d'Euler :

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\,\sin(\theta).$$

Ainsi

$$\left\{\begin{aligned} e^{i\frac{n\pi x}{L}} &= \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + i\,\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \\ e^{-i\frac{n\pi x}{L}} &= \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) - i\,\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \end{aligned}\right.$$

Nous en déduisons :

$$\begin{cases} \cos(\dfrac{n\pi x}{L}) = \dfrac{e^{i\frac{n\pi x}{L}} + e^{-i\frac{n\pi x}{L}}}{2} \\ \\ \sin(\dfrac{n\pi x}{L}) = \dfrac{e^{i\frac{n\pi x}{L}} - e^{-i\frac{n\pi x}{L}}}{2i} \end{cases}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos(\frac{n\pi x}{L}) + b_n \sin(\frac{n\pi x}{L})\right] \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\left(\frac{e^{i\frac{n\pi x}{L}} + e^{-i\frac{n\pi x}{L}}}{2}\right) + b_n\left(\frac{e^{i\frac{n\pi x}{L}} - e^{-i\frac{n\pi x}{L}}}{2i}\right)\right] \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2}(a_n - i\,b_n)\,e^{i\frac{n\pi x}{L}} + \frac{1}{2}(a_n + i\,b_n)\,e^{i\frac{-n\pi x}{L}}\right] \end{aligned}$$

Posons

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx \\ c_n &= \frac{1}{2}(a_n - i\,b_n) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\left(\cos(\frac{n\pi x}{L}) - i\,\sin(\frac{n\pi x}{L})\right)dx = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\,e^{-i\frac{n\pi x}{L}}\,dx \\ c_{-n} &= \frac{1}{2}(a_n + i\,b_n) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\left(\cos(\frac{n\pi x}{L}) + i\,\sin(\frac{n\pi x}{L})\right)dx = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\,e^{+i\frac{n\pi x}{L}}\,dx \end{aligned}$$

Ainsi nous avons

$$f(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[c_n e^{i\frac{n\pi x}{L}} + c_{-n} e^{i\frac{-n\pi x}{L}}\right]$$

$$f(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{i\frac{n\pi x}{L}} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} e^{i\frac{-n\pi x}{L}}}_{\text{Posons } n^*=-n}$$

Alors

$$f(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{i\frac{n\pi x}{L}} + \sum_{n^*=-1}^{-\infty} c_{n^*}\,e^{i\frac{n^*\pi x}{L}}$$

$$f(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{i\dfrac{n\pi x}{L}} + \sum_{n^*=-\infty}^{-1} c_{n^*}\, e^{i\dfrac{n^*\pi x}{L}}$$

Et comme n^* est une variable muette, nous obtenons

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\, e^{i\dfrac{n\pi x}{L}} \qquad \text{où} \qquad c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\, e^{-i\dfrac{n\pi x}{L}}\, dx$$

$\square$

16.4 Convergence d'une série de Fourier

Définition 16.2. *Une fonction $f(x)$ est dite **continue par morceaux** dans un intervalle $[a,b]$ si cet intervalle peut être subdivisé en un nombre fini de sous-intervalles à l'intérieur desquels $f(x)$ est continue, et si les limites à droite et à gauche de $f(x)$ dans chacun des sous-intervalles, sont des nombres finis.*

Théorème 16.1. ***(Théorème de Dirichlet (1829)- Jordan (1881))***
Si $f(x)$ est une fonction périodique de période $p = 2L$, telle que $f(x)$ et $f'(x)$ sont continues par morceaux dans l'intervalle $]-L, L[$ alors la série de Fourier de $f(x)$ évaluée en x_0, notée $SF(x_0)$ convergera vers

$$SF(x_0) = \begin{cases} f(x_0), & \text{si } x_0 \text{ est un point de continuité} \\ \\ \dfrac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2}, & \text{si } x_0 \text{ est un point de discontinuité} \end{cases}$$

Remarque.
$f'(x)$ peut avoir une limite à gauche et à droite qui est infinie.

Exemple 16.2. *Considérons une onde carrée (circuit électrique) définie par*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } -\pi < x < 0 \\ \\ h, & \text{si } 0 < x < \pi \end{cases}$$

périodique de période $p = 2\pi$.
Montrez que

$$f(x) = \frac{h}{2} + \frac{2h}{\pi} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin((2k+1)x)}{2k+1}.$$

Solution.
Puisque $L=\pi$, alors

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} h\,dx = h \\
a_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,\cos(\frac{n\pi\,x}{L})\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} h\,\cos(n\,x)\,dx \;=\; 0,\;\; n\geq 1 \\
b_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,\sin(\frac{n\pi\,x}{L})\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} h\,\sin(n\,x)\,dx = \frac{h}{n\,\pi}(1-(-1)^n)
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{h}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{h}{n\,\pi}(1-(-1)^n)\cdot\sin(n\,x) \\
&= \frac{h}{2} + \frac{h}{\pi}\Big[\frac{2\sin(1\,x)}{1} + \frac{0\sin(2\,x)}{2} + \frac{2\sin(3\,x)}{3} + \frac{0\sin(4\,x)}{4} + \frac{2\sin(5\,x)}{5} + \cdots\Big] \\
f(x) &= \frac{h}{2} + \frac{2\,h}{\pi}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin((2\,k+1)x)}{2\,k+1}.
\end{aligned}$$

Notons que pour $x_0=-\pi, 0, \pi$, nous avons

$$SF(x_0) = \frac{f(x_0^+)+f(x_0^-)}{2} = \frac{h}{2}.$$

Exemple 16.3. *Distribution de Dirac.*
Montrez que (au sens des distributions) que la série de Fourier de $\delta(x)$ sous forme exponentielle est :

$$\delta(x) = \frac{1}{2\,L}\sum_{-\infty}^{\infty} e^{i\,\frac{n\pi x}{L}}$$

Solution.
Nous avons

$$\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{2\,L}\int_{-L}^{L} f(x)\,e^{-\frac{i\,n\pi\,x}{L}}\,dx \\
&= \frac{1}{2\,L}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)\,\underbrace{e^{-\frac{i\,n\pi\,x}{L}}}_{g(x)}\,dx \\
&= \frac{1}{2\,L}g(0) = \frac{1}{2\,L}
\end{aligned}$$

Donc

$$\delta(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\,e^{i\frac{n\pi x}{L}} = \frac{1}{2\,L}\sum_{-\infty}^{\infty} e^{i\frac{n\pi x}{L}}$$

16.5 Identité de Parseval

L'identité de Parseval permet entre autres de calculer la valeur exacte de la somme de séries numériques remarquables. Parmi celles-ci, nous avons :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} &= \frac{\pi^2}{6} \\
\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2} &= \frac{\pi^2}{12} \\
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2\,n+1)^2} &= \frac{\pi^2}{8}
\end{aligned}$$

16.5.1 Identité de Parseval pour la forme trigonométrique

Considérons une fonction $f(x)$ de période $p = 2L$ dont la série de Fourier $SF(x)$ est :

$$f(x) = \underbrace{\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos(\frac{n\pi\, x}{L}) + b_n \sin(\frac{n\pi\, x}{L}) \right]}_{=SF(x)},$$

alors l'identité de Parseval est :

$$\boxed{\frac{1}{L} \int_{-L}^{L} \Big(f(x)\Big)^2\, dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 + b_n^2\right)}$$

Preuve
Puisque

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos(\frac{n\pi\, x}{L}) + b_n \sin(\frac{n\pi\, x}{L}) \right]$$

alors en multipliant les deux cotés de cette dernière expression par $f(x)$, nous avons

$$\Big(f(x)\Big)^2 = \frac{a_0}{2}\, f(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n\, f(x)\, \cos(\frac{n\pi\, x}{L}) + b_n\, f(x)\, \sin(\frac{n\pi\, x}{L}) \right]$$

Ainsi

$$\int_{-L}^{L} \Big(f(x)\Big)^2\, dx = \int_{-L}^{L} \frac{a_0}{2}\, f(x)\, dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \underbrace{\int_{-L}^{L} f(x)\, \cos(\frac{n\pi\, x}{L})\, dx}_{=L\, a_n} + b_n \underbrace{\int_{-L}^{L} f(x)\, \sin(\frac{n\pi\, x}{L})\, dx}_{=L\, b_n} \right]$$

Ce qui donne

$$\int_{-L}^{L} \left(f(x)\right)^2 \, dx = L \, \frac{a_0^2}{2} + L \, \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 + b_n^2\right)$$

D'où l'identité de Parseval

$$\frac{1}{L} \int_{-L}^{L} \left(f(x)\right)^2 \, dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 + b_n^2\right)$$

$\square$

Exemple 16.4. *Considérons la fonction* $f(x) = x$, où $-\pi < x < \pi$ *dont la série de Fourier* $SF(x)$ *est*

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(n\,x).$$

Trouvez la somme de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Solution :

Nous avons

$$\underbrace{x}_{f(x)} = \underbrace{\frac{0}{2}}_{\frac{a_0}{2}} + \sum_{n=1}^{\infty} \Big[\underbrace{0}_{a_n} \cdot \cos(n\,x) + \underbrace{2\,\frac{(-1)^{n+1}}{n}}_{b_n} \sin(n\,x) \Big]$$

Par l'identité de Parseval (forme trigonométrique), nous avons

$$\underbrace{\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \, dx}_{= \frac{2\,\pi^2}{3}} = \frac{0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(0^2 + \left(2\,\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right)^2\right)$$

$$\frac{2\,\pi^2}{3} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(2\,\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right)^2$$

Par conséquent

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

16.5.2 Identité de Parseval pour la forme exponentielle complexe

Puisque

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \, e^{i\frac{n\pi x}{L}}$$

alors l'identité de Parseval est

$$\boxed{\frac{1}{2L}\int_0^{2L} \left|f(x)\right|^2 dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|c_n\right|^2}$$

Preuve Notons que $*$ signifie la conjuguée.

$$\left(f(x)\right)^* = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n^* \, e^{-i\frac{n\pi x}{L}}$$

En multipliant cette dernière expression par $f(x)$, nous obtenons :

$$\underbrace{f(x)\left(f(x)\right)^*}_{\left|f(x)\right|^2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n^* \, f(x) \, e^{-i\frac{n\pi x}{L}}$$

Ainsi

$$\int_0^{2L} \left|f(x)\right|^2 dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n^* \underbrace{\int_0^{2L} f(x) \, e^{-i\frac{n\pi x}{L}} \, dx}_{=2L\,c_n}$$

$$= 2L \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|c_n\right|^2$$

D'où

$$\frac{1}{2L}\int_0^{2L} \left|f(x)\right|^2 dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|c_n\right|^2$$

□

Exemple 16.5. *Soit la fonction périodique de période $p = 2\pi$, (ici $L = \pi$) suivante :*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -\pi < x < 0 \\ 1 & \text{si } \ \ 0 < x < \pi \end{cases}$$

Donnez la série de Fourier (forme exponentielle) de la fonction $f(x)$.
Rappel :

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \, e^{i\frac{n\pi x}{L}} \qquad \text{où} \qquad c_n = \frac{1}{2L}\int_0^{2L} f(x) \, e^{-i\frac{n\pi x}{L}} \, dx$$

Solution. *Calculons c_n.*

$$\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\, e^{-i\,n\,x}\, dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} e^{-i\,n\,x}\, dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\frac{1}{(-i\,n)}\Big[\, e^{-i\,n\,x}\Big]_0^{\pi} \qquad \text{(valable si } n \neq 0) \\
&= \frac{1}{2\pi}\frac{1}{(-i\,n)}\Big[\, e^{-i\,n\pi} - e^{-i\,n\,0}\Big] \\
&= -i\frac{\Big[1-(-1)^n\Big]}{2\,n\,\pi}
\end{aligned}$$

Ainsi la série est :

$$f(x) = \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty}\Big[-i\frac{\Big[1-(-1)^n\Big]}{2\,n\,\pi}\Big]\, e^{i\frac{n\pi x}{L}}}_{\text{Valable pour } n\neq 0} + \underbrace{\frac{1}{2}}_{=c_0}$$

16.6 Dérivation et intégration

Si

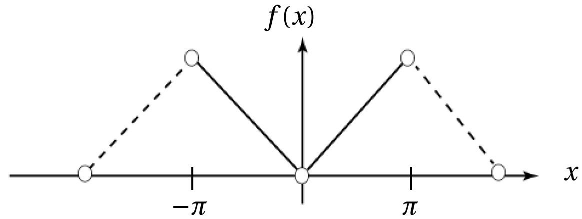
$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big[a_n\cos(\frac{n\pi\,x}{L}) + b_n\sin(\frac{n\pi\,x}{L})\Big],$$

alors, sous certaines conditions :

$$\begin{aligned}
&1)\ \ f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\Big[-\frac{n\pi}{L}a_n\sin(\frac{n\pi\,x}{L}) + \frac{n\pi}{L}b_n\cos(\frac{n\pi\,x}{L})\Big] \\
&2)\ \ \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt = \frac{a_0}{2}(x-x_0)+\sum_{n=1}^{\infty}\Big[a_n\int_{x_0}^{x}\cos(\frac{n\pi\,t}{L})dt+b_n\int_{x_0}^{x}\sin(\frac{n\pi\,t}{L})\,dt\Big]
\end{aligned}$$

Exemple 16.6. *Soit une onde triangulaire :*

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } -\pi < x < 0 \\ \ \ x & \text{si } \ 0 < x < \pi \end{cases}$$



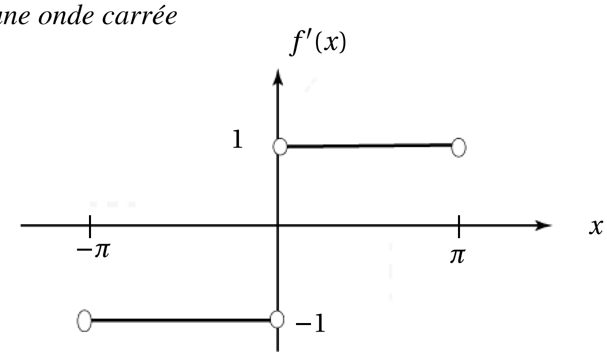
dont la série de Fourier de $f(x)$ *est donnée par*

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos((2\,k+1)x)}{(2\,k+1)^2}$$

- *Cas de la dérivée.*
  Nous avons

$$f'(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin((2\,k+1)x)}{(2\,k+1)} = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad -\pi < x < 0 \\ \ \ 1 & \text{si} \quad \ \ 0 < x < \pi \end{cases}$$

qui représente une onde carrée



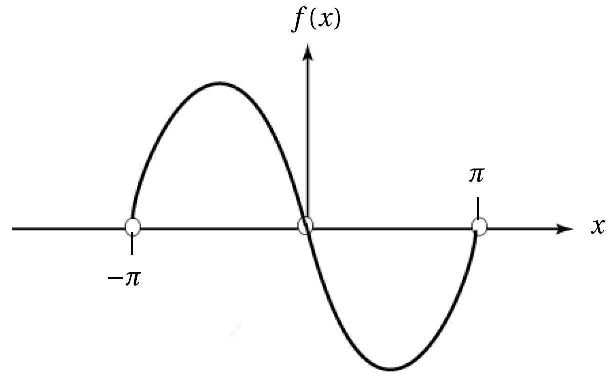
- *Cas de l'intégration.*
  Nous avons

$$\int_0^x f(t)\,dt = \frac{\pi}{2}x - \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin((2\,k+1)x)}{(2\,k+1)^3}$$

d'où

$$-\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin((2\,k+1)x)}{(2\,k+1)^3} = \begin{cases} -\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{\pi}{2}x & \text{si} \quad -\pi < x < 0 \\[2em] +\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{\pi}{2}x & \text{si} \quad \ \ 0 < x < \pi \end{cases}$$

qui est une onde parabolique



En prenant $x = \dfrac{\pi}{2}$, *nous obtenons*

$$-\frac{\pi^2}{8} = -\frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2\,k+1)^3}$$

d'où

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2\,k+1)^3} = \frac{\pi^3}{32}$$