Chapitre 5

Intégration et formule de Cauchy

Un peu d'histoire.

Augustin Louis, baron Cauchy, né à Paris le 21 août 1789 et mort à Sceaux (Hauts-de-Seine) le 23 mai 1857, est un mathématicien français.
On lui doit notamment en analyse l'introduction des fonctions holomorphes et des critères de convergence des suites et des séries entières. Ses travaux sur les permutations furent précurseurs de la théorie des groupes. En optique, on lui doit des travaux sur la propagation des ondes électromagnétiques.

Ses travaux seront publiés en 1838 et poursuivis par Laurent, qui fournit comme généralisation des séries entières les séries de Laurent.

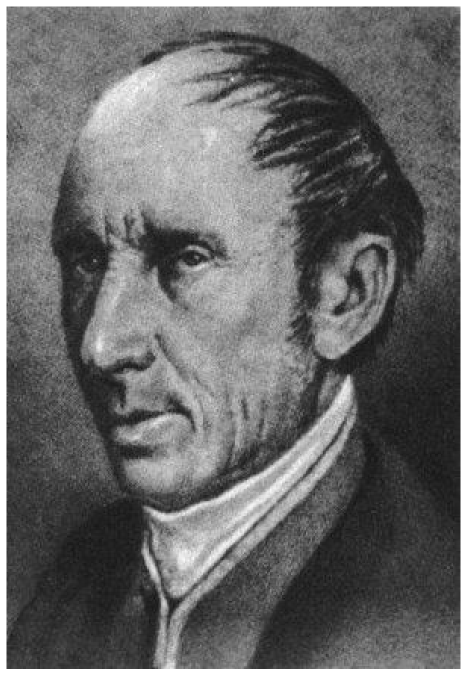


FIGURE 5.1: Augustin Louis Cauchy 1789-1857

5.1 Intégrales complexes

Définition 5.1. *Soient C une courbe dans le plan complexe et la fonction*

$$f(x+iy) = u(x,y) + i\, v(x,y)$$

En considérant $z = x + i\,y$ alors $dz = dx + i\,dy$. Par conséquent on définit

$$\begin{aligned} \int_c f(z)dz &= \int_c (u + i\,v)(dx + i\,dy) \\ &= \underbrace{\int_c (u\,dx - v\,dy)}_{I_1} + i \underbrace{\int_c (v\,dx + u\,dy)}_{I_2} \end{aligned}$$

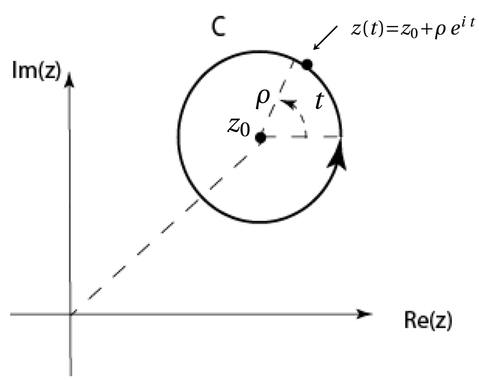
Notons que les intégrales I_1 et I_2 ci-dessus sont des intégrales curvilignes dans $\mathbb{R}^2$.

Paramétrisation d'une courbe.
Soit $z = x + i\,y$, un point appartenant à une courbe C dans le plan complexe. Pour paramétrisée cette courbe, il s'agit d'exprimer les variables x et y en fonction d'un seul paramètre t pour obtenir $z(t)$. C'est-à-dire

$$z(t) = x(t) + i\,y(t), \qquad \text{où} \qquad a \le t \le b.$$

Et on définit sa dérivée par : $\dfrac{dz}{dt} = z'(t) = x'(t) + i\,y'(t)$. D'où $dz = z'(t)\,dt$.

Exemple 5.1. *Donnez une paramétrisation d'un cercle de rayon ρ et centré en z_0.*



Soit $z \in C$ et $z_0 = x_0 + i\,y_0$. Alors

$$\begin{aligned} z &= x + i\,y = \left(x_0 + \rho\cos(t)\right) + i\left(y_0 + \rho\,\sin(t)\right) \\ &= \left(\underbrace{x_0 + i\,y_0}_{=z_0}\right) + \rho\left(\underbrace{\cos(t) + i\,\sin(t)}_{=e^{i\,t}}\right) \\ &= z_0 + \rho e^{i\,t} \end{aligned}$$

Donc une paramétrisation recherchée est

$$z(t) = z_0 + \rho e^{i\,t} \text{ où } 0 \le t \le 2\pi$$

Notons que $|z - z_0| = \rho$ représente un cercle centré en z_0 et de rayon ρ.

Théorème 5.1. *Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction complexe continue en tous points d'une courbe C et soit $z(t) = x(t) + i\,y(t)$ avec $a \le t \le b$, une paramétrisation de C. On a alors :*

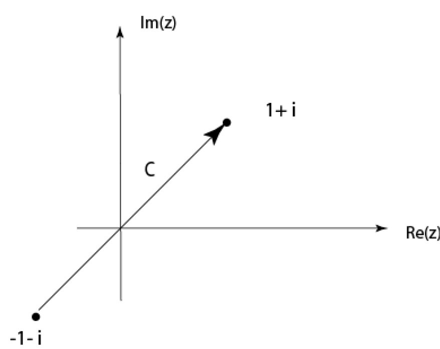
$$\int_C f(z)\,dz = \int_a^b f(z(t))\ \underbrace{z'(t)\,dt}_{dz}$$

Preuve. Il suffit de développer

$$f(z(t))z'(t)\,dt = \left[u(x(t), y(t)) + i\,v(x(t), y(t))\right]\left[x'(t) + i\,y'(t)\right]dt$$

dans la deuxième intégrale. □

Exemple 5.2. *Évaluons $J = \int_c (z+1)\,dz$ où C est le segment reliant le point $-1-i$ au point $1+i$.*



Solution :
Une paramétrisation du segment C est

$$z(t) = t + i\,t, \text{ où } \; -1 \le t \le 1.$$

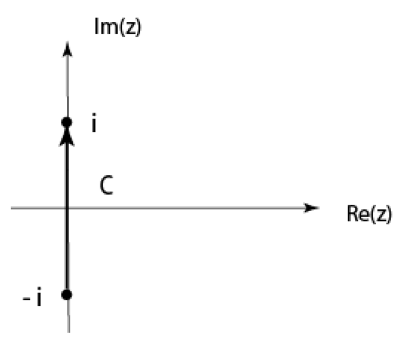
Puisque $\frac{d}{dt} z(t) = (1+i)$, *d'où* $dz = (1+i)dt$ *alors*

$$\begin{aligned} J &= \int_c (z+1)\,dz \\ &= \int_{-1}^{1} (t+i\,t+1)\,(1+i)\,dt = \int_{-1}^{1} ((2t+1)\,i+1)\,dt \\ &= \int_{-1}^{1} dt + i \int_{-1}^{1} (2t+1)\,dt \\ &= 2+2\,i \end{aligned}$$

Notons que puisque $f(z) = z+1$ *est analytique alors*

$$\int_c f(z)\,dz = \int_{-1-i}^{1+i} (z+1)\,dz = \frac{(z+1)^2}{2}\Big|_{-1-i}^{1+i} = 2+2\,i$$

Exemple 5.3. *Évaluons* $J = \int_c |z|\,dz$ *où C est le segment reliant le point* $-i$ *au point* i.



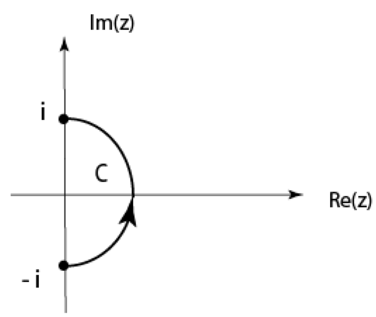
Solution :
Une paramétrisation du segment C est

$$z(t) = 0 + i\,t \text{ où } \; -1 \le t \le 1.$$

Puisque $z'(t) = i$ *et que* $|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{(t\,i)(-t\,i)} = \sqrt{t^2} = |t|$*, alors*

$$\begin{aligned} J &= \int_c |z|\,dz = \int_{-1}^{1} |z(t)|\,z'(t)\,dt = \int_{-1}^{1} |t|\,i\,dt \\ &= 2\,i \int_0^1 t\,dt \qquad \text{(car } |t| \text{ est une fonction paire)} \\ &= 2\,i \left[\frac{t^2}{2}\right]_{t=0}^{1} = i \end{aligned}$$

Exemple 5.4. *Évaluons* $J = \int_c |z|\,dz$ *où* C *est le demi-cercle de rayon 1 centré à l'origine et à droite de l'axe imaginaire et parcouru dans le sens positif (anti-horaire).*



Solution *:*

Une paramétrisation du segment C est

$$z(t) = e^{i\,t} \quad \text{où} \quad -\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}.$$

Puisque $z'(t) = i\,e^{i\,t}$ *et que* $|z| = |e^{i\,t}| = 1$*, alors*

$$\begin{aligned} J &= \int_c |z|\,dz = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |z(t)|\,z'(t)\,dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1\cdot i\,e^{i\,t}\,dt \\ &= i \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{i\,t}\,dt = i \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [\cos(t) + i \underbrace{\sin(t)}_{\text{fonction impaire}}]\,dt \\ &= i \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\,dt = 2\,i \end{aligned}$$

Remarques.

- $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1 \cdot i\, e^{i\,t}\, dt = \left[e^{i\,t} \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = e^{i\,\frac{\pi}{2}} - e^{-i\,\frac{\pi}{2}} = 2\,i$
- *En comparant les résultats des exemples* **5.3** *et* **5.4**, *on constate que l'intégrale* $\displaystyle\int_c |z|\, dz$ *dépend du chemin.*

Propriétés.

*P.*1 $\displaystyle\int_C k f(z)\, dz = k \int_C f(z)\, dz$

*P.*2 $\displaystyle\int_C \left[f(z) \pm g(z) \right]\, dz = \int_C f(z)\, dz \pm \int_C g(z)\, dz$

*P.*3 Si $C = C_1 \cup C_2$ et $C_1 \cap C_2$ est au plus un point alors

$$\int_C f(z)\, dz = \int_{C_1} f(z)\, dz + \int_{C_2} f(z)\, dz$$

*P.*4 Si C^- désigne la courbe C parcourue en sens inverse alors

$$\int_{C^-} f(z)\, dz = -\int_C f(z)\, dz$$

5.2 Inégalité M L

Théorème 5.2. *(Inégalité M L) (inégalité de Darboux)*

Si $|f(z)| \leq M$ *(M étant une valeur finie* $\in \mathbb{R}$*) pour* $z \in \mathbb{C}$ *sur un chemin C alors*

$$\left|\int_C f(z)\,dz\right| \leq M\,L \qquad \text{où } L \text{ est la longueur de la courbe } C$$

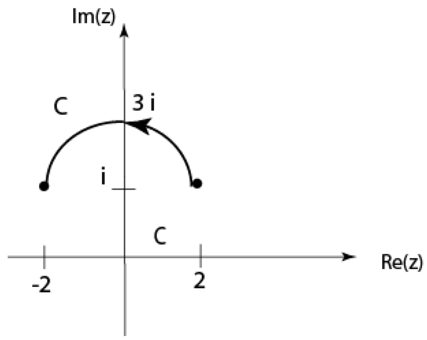
Cette inégalité est très utile pour l'évaluation des intégrales curvilignes, en particulier pour montrer que dans certains cas, ces dernières sont nulles.

Preuve. Soit $z(t) = x(t) + i\,y(t)$ avec $a \leq t \leq b$, une paramétrisation de la courbe C. Ainsi

$$\begin{aligned}
\left|\int_c f(z)\,dz\right| &= \left|\int_a^b f(z(t))z'(t)\,dt\right| \\
&\leq \int_a^b \left|f(z(t))z'(t)\right| dt = \int_a^b \left|f(z(t))\right|\left|z'(t)\right| dt \\
&\leq \int_a^b M\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt = M \underbrace{\int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt}_{L} = M\,L
\end{aligned}$$

□

Exemple 5.5. *Donnez une borne sur la valeur de* $\left|\int_C e^{z^2}\,dz\right|$ *où* C *est le demi-cercle définie par* $|z-i|=2$ *,* $Im(z)\geq 1$*, parcouru en allant de* $2+i$ *à* $-2+i$*.*



Solution. Une paramétrisation du demi-cercle C est :

$$z(t)=\rho_0+\rho\,e^{i\,t}=i+2\,e^{i\,t},\ \text{ où }\ 0\leq t\leq\pi.$$

D'o'u

$$z'(t)=2ie^{i\,t}\,dt \qquad \Longrightarrow \qquad |z'(t)|=2$$

Ainsi nous avons

$$\begin{aligned}
f(z) &= e^{z^2}\\
f(z(t)) &= e^{(z(t))^2}\\
|f(z(t))| &= |e^{(z(t))^2}|=|e^{\left(i+2\,e^{i\,t}\right)^2}|=|e^{(-1+4ie^{it}+4e^{2it})}|\\
&= |e^{-1}|\,|e^{4ie^{it}}|\,|e^{4e^{2it}}|\\
&= |e^{-1}|\,|e^{-4\sin(t)}|\,\underbrace{|e^{4i\cos(t)}|}_{=1}\,|e^{4(\sin(2t)+i\cos(2t))}|\\
&= e^{4\sin(2t)-4\sin(t)-1}\leq e^{4\sin(2t)}\leq e^{4\sin(2\frac{\pi}{4})}=e^4=M
\end{aligned}$$

Ainsi

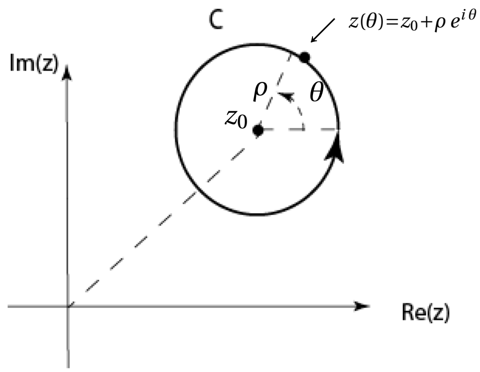
$$\left|\int_C e^{z^2}\,dz\right|\leq\left|\int_C\underbrace{|e^{z^2}|}_{\leq e^4}\,dz\leq e^4\underbrace{\int_C|z'(t)|dt}_{=L(c)}=e^4\int_{t=0}^{\pi}2dt=e^4 2\pi\right.$$

Ainsi une borne demandée est $e^4 2\pi$. □

Exemple 5.6. *Considérons un cercle* C *centré en* z_0 *et de rayon* $\rho>0$ *dont l'équation est*

$$|z-z_0|=\rho.$$

Le sens de parcours est illustrée à la figure ci-dessous.



Montrez que, pour tout $\rho > 0$,

$$\oint_{|z-z_0|=\rho} \frac{dz}{(z-z_0)^n} = \begin{cases} 2\pi\, i, & \text{pour } n = 1 \\ \\ 0 & \text{pour } n \neq 1, n \in \mathbb{Z} \end{cases}.$$

Solution. Nous avons

$$\begin{aligned} z &= z_0 + \rho\, e^{i\theta}, \qquad 0 \le \theta \le 2\pi \\ z - z_0 &= \rho\, e^{i\theta} \\ dz &= \rho\, i\, e^{i\theta}\, d\theta \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \oint_C \frac{dz}{(z-z_0)^n} &= \int_0^{2\pi} \frac{\rho\, i\, e^{i\theta}}{\left(\rho\, e^{i\theta}\right)^n} d\theta = \frac{i}{\rho^{n-1}} \int_0^{2\pi} e^{-i(n-1)\theta} d\theta \\ &= \frac{i}{\rho^{n-1}} \Big[\int_0^{2\pi} \cos[(n-1)\theta]\, d\theta - i \int_0^{2\pi} \sin[(n-1)\theta]\, d\theta \Big] \\ &= \begin{cases} 2\pi\, i, & \text{pour } n = 1 \\ \\ 0 & \text{pour } n \neq 1, n \in \mathbb{Z} \end{cases} \end{aligned}$$

$\square$