Chapitre 15

Transformée en Z inverse

Considérons

$$Z\Big(f(n)\Big) = F(z)$$

alors nous définissons la transformée en Z inverse par

$$f(n) = Z^{-1}\Big(F(z)\Big)$$

Schématiquement, nous avons :

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge] f(n) \arrow[r, bend left, "Z\left(f(n)\right)"] & F(z) \arrow[l, bend left, "Z^{-1}\left(F(z)\right)"] \end{tikzcd}$$

Plusieurs méthodes peuvent être utilisées pour déterminer la suite $f(n),\ n = 0, 1, 2, \ldots.$

Parmi ces méthodes, nous retrouvons :

- les séries de puissances ;
- la décomposition en fractions partielles ;
- la méthode des résidus d'une fonction.

15.1 Méthode des séries de puissances

Puisque la transformée en Z de $f(n)$ est définie par

$$Z\Big(f(n)\Big) = F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)\, z^{-n} = f(0) + \frac{f(1)}{z} + \frac{f(2)}{z^2} + \frac{f(3)}{z^3} + \cdots$$

Ainsi si $F(z)$ est analytique pour $|z| > R$ alors $f(n)$ est le coefficient de z^{-n} dans le développement de MacLaurin de $F(z)$ vue comme une fonction de $\dfrac{1}{z}$.

Exemple 15.1. *Calculez la transformée en Z inverse de la fonction*

$$F(z) = \frac{z\,(z+1)}{(z-1)^3}$$

Solution
Nous avons

$$F(z) = \frac{z^2+z}{z^3-3z^2+3z-1}.$$

En effectuant la division du polynôme z^2+z par le polynôme z^3-3z^2+3z-1, nous obtenons

$$F(z) = \frac{1}{z} + \frac{4}{z^2} + \frac{9}{z^3} + \frac{16}{z^4} + \cdots$$

d'où

$$f(0) = 0,\ f(1) = 1,\ f(2) = 4,\ f(3) = 9,\ f(4) = 16, \cdots$$

Ainsi, on en déduit le terme général :

$$f(n) = n^2, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

15.2 Méthode des fractions partielles

La méthode consiste, s'il est possible, à utiliser la décomposition en fractions partielles afin d'exprimer $F(z)$ sous la forme :

$$F(z) = F_1(z) + F_2(z) + \cdots$$

Par la suite, on déduit $f(n)$ en inversant chaque $F_k(z)$, $k = 1, 2, \ldots$ C'est-à-dire :

$$f(n) = Z^{-1}\Big(F(z)\Big) = Z^{-1}\Big(F_1(z)\Big) + Z^{-1}\Big(F_2(z)\Big) + \cdots$$

où $Z^{-1}\Big(F_k(z)\Big)$, $k = 1, 2, \ldots$ est obtenu à partir de résultats connus. Notons toutefois que les résultats de base se présentent parfois avec la variable z au numérateur de $F_k(z)$ comme

$$\frac{z}{z-1} = F_1(z), \qquad \frac{z}{(z-1)^2} = F_2(z), \ldots$$

plutôt que sous la forme

$$\frac{1}{z-1}, \quad \frac{1}{(z-1)^2}, \ldots$$

Pour cette raison, il est préférable de développer la fonction $\dfrac{F(z)}{z}$ en fractions partielles.

Exemple 15.2. *Déterminez la suite $f(n)$ pour la fonction*

$$F(z) = \frac{4\,z}{(3\,z+1)\,(z-1)}$$

Solution

Nous avons

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{4}{(z-1)\,(3\,z+1)} = \frac{1}{z-1} - \frac{3}{3\,z+1}$$

d'où

$$F(z) = \frac{z}{z-1} - \frac{3\,z}{3\,z+1}$$

En sachant que $Z\Big(c^n\Big) = \dfrac{z}{z-c}$, nous avons

$$\begin{aligned} f(n) &= Z^{-1}\left(\frac{z}{z-1}\right) - Z^{-1}\left(\frac{z}{z+\frac{1}{3}}\right) \\ &= 1 - \left(\frac{-1}{3}\right)^n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

15.3 Méthode des résidus

Rappelons nous que la série de Laurent de $f(z)$ est :

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n\,(z-z_0)^n, \qquad \text{où } a_n = \frac{1}{2\pi\,i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz,$$

Alors la fonction

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)\,z^{-n} \overset{n^*\equiv -n}{\equiv} \sum_{n^*=0}^{-\infty} f(-n^*)\,z^{n^*} = \sum_{n^*=-\infty}^{0} f(-n^*)\,z^{n^*} \equiv \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{0} f(-n)\,z^n}_{\text{Série de Laurent}}$$

est une série de Laurent, autour de $z = 0$, qui converge pour $|z| > R$ lorsque R est assez grand .
Par comparaison des séries associées à $f(z)$ et $F(z)$, nous avons

$$a_n = f(-n) = \frac{1}{2\pi\, i} \oint_C \frac{F(z)}{(z - \underbrace{z_0}_{=0})^{n+1}}\, dz,$$

Par le changement de variable $n^* = -n$ dans $f(-n)$, nous obtenons :

$$\boxed{f(n) = \frac{1}{2\pi\, i} \oint_C z^{n-1}\, F(z)\ dz}$$

Exemple 15.3. *Déterminez la suite $f(n)$ pour la fonction*

$$F(z) = \frac{z^2}{(z+3)^2}$$

Note, la série de puissance de$F(z)$ obtenue par division polunomiale est :

$$F(z) = 1 - \frac{6}{z} + \frac{27}{z^2} - \frac{108}{z^3} + \cdots$$

donc : $f(0) = 1, f(1) = -6, f(2) = 27, f(3) = -108, \ldots$
Solution
Nous avons

$$\begin{aligned}
f(n) &= \frac{1}{2\pi\, i} \oint_C z^{n-1}\ F(z)\, dz \\
&= \frac{1}{2\pi\, i} \oint_C z^{n-1}\ \frac{z^2}{(z+3)^2}\, dz \\
&= \frac{1}{2\pi\, i} \oint_C \underbrace{\frac{z^{n+1}}{(z+3)^2}}_{=G(z)}\, dz \\
&= \frac{1}{2\pi\, i} \left[2\,\pi\, i \sum_{k=1}^{nb_{sing.}} Rés\,(G(z), z = z_k) \right] \\
&= \sum_{k=1}^{nb_{sing}} Rés\,(G(z), z = z_k)
\end{aligned}$$

Et puisque $z=-3$ *est un pôle d'ordre* $m=2$*, alors*

$$\begin{aligned}
f(n) &= \sum_{k=1}^{nb_{sing}} Rés\,(G(z), z=-3) \\
&= \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z\to -3} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-z_0)^m\, G(z)\right] \\
&= \frac{1}{(2-1)!} \lim_{z\to -3} \frac{d^{2-1}}{dz^{2-1}}\left[(z+3)^2\, \frac{z^{n+1}}{(z+3)^2}\right] \\
&= \lim_{z=-3} (n+1)\, z^n \\
f(n) &= (n+1)(-3)^n, \qquad n=0,1,2\ldots
\end{aligned}$$

En conclusion

$$f(n)=(n+1)(-3)^n, \qquad n=0,1,2\ldots$$