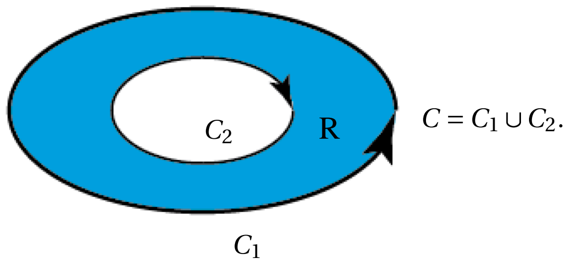
5.3 Théorème de Cauchy

Définition 5.2. *Un sens de parcours d'une courbe C est dit* ***direct*** *lorsqu'un observateur se déplacant sur C voit la région R à sa gauche.*



Théorème 5.3. *(Théorème intégral de Cauchy)*
Si $f(z)$ est analytique à l'intérieur et sur une courbe fermée C délimitant un domaine simplement connexe (pas de trou dans ce domaine) alors

$$\boxed{\oint_C f(z)\,dz = 0.}$$

Preuve.

Soit $f(x+i\,y) = u(x,y) + i\,v(x,y)$. Supposons que les dérivées partielles de $u(x,y)$ et $v(x,y)$ soient continues à l'intérieur et sur la courbe C. Nous avons par la formule de **Green-Riemann** :

$$\oint_C P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \iint_D \left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right] dA$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\oint_C f(z)\,dz &= \oint_C u\,dx - v\,dy + i\oint_C v\,dx + u\,dy \\
&= \iint_R \Big[\underbrace{-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}}_{=0}\Big]\,dx\,dy + i\iint_R \Big[\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}}_{=0}\Big]\,dx\,dy \\
&= 0 + 0\,i = 0 \qquad \text{en utilisant les équations de Cauchy-Riemann.}
\end{aligned}$$

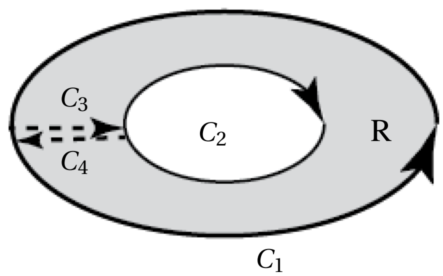
□

Conséquences du théorème intégral de Cauchy

1. Si $f(z)$ est analytique à l'intérieur et sur la frontière d'une région délimitée par deux courbes fermées C_1 et C_2 ($C = C_1 \cup C_2$, où C_1 et C_2 sont fermées) alors

$$\boxed{\oint_{C_1} f(z)\,dz = \oint_{C_2} f(z)\,dz.}$$

Preuve. Considérons le domaine R suivant.



$C = C_1 \cup C_2$

Par le théorème intégral de Cauchy, nous avons :

$$\begin{aligned}
0 = \oint_{C} f(z)\,dz &= \oint_{C_1} f(z)\,dz + \oint_{C_2} f(z)\,dz + \underbrace{\int_{C_3} f(z)\,dz + \int_{C_4} f(z)\,dz}_{=0,\ \text{car sens inverse}} \\
\Rightarrow \oint_{C_1} f(z)\,dz &= -\oint_{C_2} f(z)\,dz \\
&= \oint_{C_2} f(z)\,dz
\end{aligned}$$

□

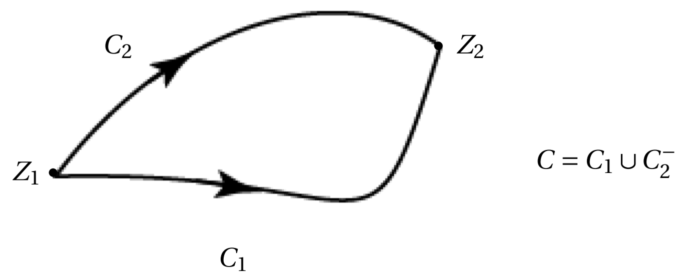
2. Si $f(z)$ est analytique et si C_1 et C_2 sont des courbes reliant deux points z_1 et z_2 alors

$$\boxed{\int_{C_1} f(z)\,dz = \int_{C_2} f(z)\,dz}$$

On dénote alors cette intégrale par

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)\,dz.$$

Preuve. Soit la courbe $C = C_1 \cup C_2^-$. Le signe $(-)$ indique le sens de parcours inverse de C_2.



Par le théorème intégral de Cauchy, nous avons

$$\begin{aligned} 0 = \oint_C f(z)\,dz &= \int_{C_1} f(z)\,dz + \int_{C_2^-} f(z)\,dz \\ &= \int_{C_1} f(z)\,dz - \int_{C_2} f(z)\,dz \\ \Rightarrow \qquad \int_{C_1} f(z)\,dz &= \int_{C_2} f(z)\,dz \end{aligned}$$

□

3. Si $f(z)$ est analytique dans une région contenant z_1 et z_2 et si $F'(z) = f(z)$, alors
$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)\,dz = F(z_2) - F(z_1)$$
Cela signifie que si f est analytique alors la valeur de l'intégrale est indépendante du chemin reliant les points z_1 et z_2.

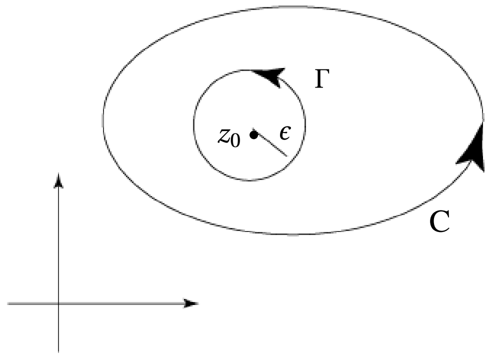
Exemple 5.7. *Soit $f(z) = z$ qui est analytique sur $\mathbb{C}$ et $z_1 = i$ et $z_2 = 2 - i$. Ainsi*

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)\,dz = \int_i^{2-i} z\,dz = \left[\frac{z^2}{2}\right]_i^{2-i} = \frac{(2-i)^2 - i^2}{2} = 2 - 2\,i$$

Théorème 5.4. *(Formule de Cauchy)*
Si $f(z)$ est analytique à l'intérieur et sur une courbe fermée C et z_0 est un point à l'intérieur de C alors

$$\boxed{f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz \iff 2\pi i\, f(z_0) = \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz}$$

Preuve.
Considérons une courbe circulaire Γ centré en z_0 de rayon ϵ.



Une paramétrisation de la courbe Γ est :

$$z(\theta) = z_0 + \epsilon\, e^{i\theta}.$$

Sur cette courbe Γ nous avons $z - z_0 = \epsilon e^{i\theta}$. Ainsi nous avons par la formule intégrale de Cauchy :

$$\begin{aligned}
\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\, dz &= \oint_\Gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\, dz \\
&= i \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0+\epsilon\, e^{i\theta})}{\epsilon\, e^{i\theta}}\, \epsilon\, e^{i\theta} d\theta, \qquad \forall \epsilon > 0 \\
\Rightarrow \qquad \oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\, dz &= \lim_{\epsilon\to 0} i \int_0^{2\pi} f(z_0+\epsilon\, e^{i\theta}) d\theta \\
&= 2\,\pi\, i\, f(z_0)
\end{aligned}$$

Corrollaire. (Formule de Cauchy généralisée)
Si $f(z)$ est analytique alors $f^{(n)}(z)$ est analytique pour $n = 1, 2, 3, \ldots$ et

$$\boxed{f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\,\pi\, i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\, dz.}$$

Notons que cette formule peut se montrer par récurrrence mathématique (induction mathématique).

Théorème 5.5. *(Théorère de Liouville)*
Si $f(z)$ est analytique dans $\mathbb{C}$ et si $|f(z)| \le M$, pour tout $z \in \mathbb{C}$ alors $f(z)$ est une constante.

Preuve. Pour tout $z_0 \in \mathbb{C}$ et pour tout $R > 0$, nous avons par la formule de Cauchy généralisé avec $n = 1$:

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=R} \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\, dz$$

D'où

$$|f'(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi R \cdot \frac{M}{R^2} = \frac{M}{R} \underbrace{\longrightarrow}_{R\to\infty} = 0$$

Ainsi $f'(z_0) \equiv 0$. Donc f est une constante. □

Exemple 5.8. *Évaluez l'intégrale suivante à l'aide de la formule de Cauchy.*

$$\frac{1}{2\,\pi\,i}\oint_{|z|=3}\frac{e^{z\,\tau}}{z^2+1}\,dz \qquad (\tau \text{ étant une constante})$$

Solution

Par une décomposition en fractions partielles, nous avons

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z^2+1} &= \frac{\frac{1}{2}i}{z+i}-\frac{\frac{1}{2}i}{z-i}\\
\Rightarrow \qquad \frac{e^{z\,\tau}}{z^2+1} &= \frac{\frac{1}{2}i\,e^{z\,\tau}}{z+i}-\frac{\frac{1}{2}i\,e^{z\,\tau}}{z-i}\\
\Rightarrow \qquad \frac{e^{z\,\tau}}{z^2+1}dz &= \frac{\frac{1}{2}i\,e^{z\,\tau}}{z+i}dz-\frac{\frac{1}{2}i\,e^{z\,\tau}}{z-i}dz\\
\frac{1}{2\,\pi\,i}\oint_{|z|=3}\frac{e^{z\,\tau}}{z^2+1}dz &= \underbrace{\frac{1}{2\,\pi\,i}\oint_{|z|=3}\frac{\frac{1}{2}i\,e^{z\,\tau}}{z-(-i)}dz}_{=f(-i)}-\underbrace{\frac{1}{2\,\pi\,i}\oint_{|z|=3}\frac{\frac{1}{2}i\,e^{z\,\tau}}{z-i}dz}_{=f(i)}
\end{aligned}$$

et par Cauchy avec $f(z)=\dfrac{1}{2}i\,e^{z\,\tau}$

$$\begin{aligned}
&= f(-i)+f(i)\\
&= \left[\frac{1}{2}i\,e^{z_0\,\tau}\right]_{z_0=-i}-\left[\frac{1}{2}i\,e^{z_0\,\tau}\right]_{z_0=i}\\
&= \frac{1}{2}\cdot i\left[e^{i(-\tau)}-e^{i\,\tau}\right]\\
&= \frac{1}{2}\cdot i\left[\Big(\cos(\tau)-i\sin(\tau)\Big)-\Big(\cos(\tau)+i\sin(\tau)\Big)\right]\\
&= \sin(\tau)
\end{aligned}$$

Remarquons que la fonction $f(z)=\frac{1}{2}i\,e^{z\,\tau}$ *est analytique car*

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{2}i\,e^{z\,\tau}=\frac{1}{2}i\,e^{(x+i\,y)\,\tau}=\frac{1}{2}i\,e^{x\tau}\Big[\cos(y\tau)+i\sin(y\tau)\Big]\\
&= \Big[\underbrace{-\frac{1}{2}e^{x\tau}\sin(y\tau)}_{u(x,y)}\Big]+i\Big[\underbrace{e^{x\tau}\cos(y\tau)}_{v(x,y)}\Big]
\end{aligned}$$

Par les conditions de Cauchy-Riemann, nous avons

$$\begin{cases}
\dfrac{\partial u}{\partial x}=-\tau\dfrac{1}{2}e^{x\tau}\sin(y\tau)=\dfrac{\partial v}{\partial y}\\[2ex]
\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\tau\dfrac{1}{2}e^{x\tau}\cos(y\tau)=-\dfrac{\partial v}{\partial x}.
\end{cases}$$