Chapitre 6

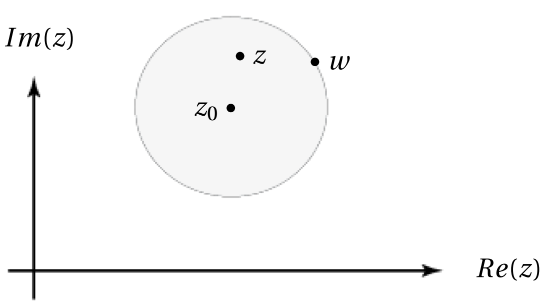
Série de Laurent

6.1 Formule de Taylor

Si $f(z)$ est analytique à l'intérieur et sur un cercle centré au point z_0 alors pour tout z à l'intérieur de ce cercle nous avons

$$\boxed{f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n}$$

Preuve.



Soit w appartenant au cercle. Ainsi, on a $\left|\frac{z-z_0}{w-z_0}\right| < 1$. Alors

$$\begin{aligned} \frac{1}{w-z} &= \frac{1}{(w-z_0)-(z-z_0)} = \frac{1}{(w-z_0)}\left[\frac{1}{1-\dfrac{z-z_0}{w-z_0}}\right] \\ &\overset{\text{S.géo.}}{=} \frac{1}{(w-z_0)}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^n, \qquad \left|\frac{z-z_0}{w-z_0}\right| < 1 \end{aligned}$$

Ainsi, nous avons l'identité

$$\frac{1}{w-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}}, \qquad \left|\frac{z-z_0}{w-z_0}\right| < 1 \tag{6.1.1}$$

En substituant $z = w$ et $z_0 = z$, dans la formule de Cauchy qui est

$$\boxed{f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)}\, dz}$$

nous avons

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(w)}{(w-z)}\, dw$$

et en utilisant l'identité (6.1.1), nous avons

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}} f(w)\, dw \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (z-z_0)^n \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\, dw}_{=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^n \end{aligned}$$

□

Exemples Voici le développement de Taylor autour de $z_0 = 0$ pour quelques fonctions élémentaires :

1. $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \qquad |z| < \infty$
2. $\sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad |z| < \infty$
3. $\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \qquad |z| < \infty$
4. $Ln(1-z) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} \qquad |z| < \infty$
5. $\arctan(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)} \qquad |z| < 1$

6.

$$
\begin{aligned}
(1+z)^p &= 1 + p\,z + \frac{p(p-1)}{2!}z^2 + \frac{p(p-1)(p-2)}{3!}z^3 + \cdots + \underbrace{\frac{p(p-1)(p-2)\cdots(p-(k-1))(p-k)!}{k!\,(p-k)!}}_{=\frac{p!}{(p-k)!k!}=\binom{p}{k}} z^k + \cdots \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{p}{k} z^n \qquad |z| < 1
\end{aligned}
$$

C'est la série du binôme. Si $(1+z)^p$ est une fonction multiforme le résultat est valable pour la branche principale de la fonction qui prend la valeur 1 pour $z = 0$.