Chapitre 1

Nombres complexes

Un peu d'histoire.

FIGURE 1.1: Girolamo Cardano (1501 - 1576)

L'histoire des nombres complexes commence vers le milieu du xvi^{e} siècle avec une première apparition en 1545, dans l'oeuvre de Cardan, d'une expression contenant la racine carrée d'un nombre négatif, nombre qu'il appelle sophistiqué. C'est Raphaël Bombelli qui met en place les règles de calcul sur ces quantités que l'on appelle alors impossibles avant de leur donner le nom d'imaginaires.

Durant trois siècles, ces nombres sont regardés avec méfiance, n'en étant pas vraiment mais permettant des raccourcis intéressants tant en algèbre que dans la toute nouvelle branche du calcul infinitésimal. Les mathématiciens du xviii^{e} siècle tentent avec audace de généraliser les fonctions de la variable réelle à la variable imaginaire, tantôt avec succès, comme pour l'exponentielle complexe, tantôt avec plus d'aléas, comme pour la fonction racine n-ième ou la fonction logarithme complexe.

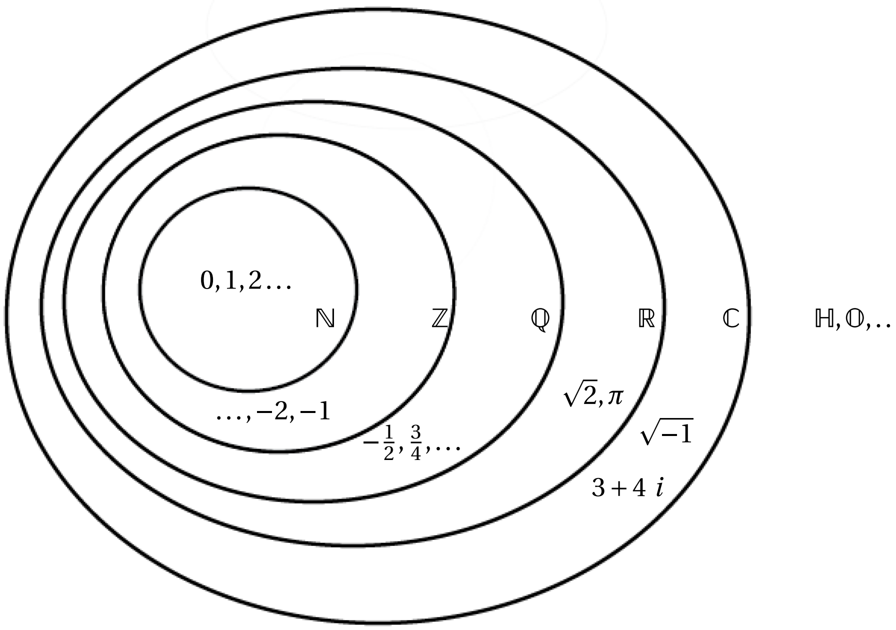
Durant la première moitié du xixe siècle se succèdent les tentatives de légitimation des nombres complexes comme représentation du plan, ensemble de polynômes ou structure algébrique définie sur des couples de réels. Cependant leur utilité dans tous les domaines de l'algèbre et l'analyse et l'utilisation qu'en font les physiciens, tant en optique que dans le domaine de l'électricité, en avaient déjà fait des outils essentiels des sciences mathématiques et physiques.

Dans l'histoire des nombres, Il a fallu une révolution mentale pour passer des nombres rationnels aux nombres réels. Que dire, alors, du passage des réels à ces ≪ imaginaires ≫, ensuite appelés ≪ complexes ≫, qui permettent de s'assurer de l'existence de solutions de n'importe quelle équation algébrique à coefficients réels À commencer par celle qui est à la fois l'une des plus simples et des plus infranchissables pour l'esprit :

$$x^2 + 1 = 0$$

Ultime tabou que d'affirmer l'existence de ce nombre i, initiale d'imaginaire, dont le carré est -1 ! L'on doit à Leonhard Euler l'origine de la notation i (1777).

1.1 Classification des nombres



où :

$\mathbb{N}$ = l'ensemble des entiers naturels
$\mathbb{Z}$ = l'ensemble des entiers relatifs
$\mathbb{Q}$ = l'ensemble des nombres rationnels : les nombres s'écrivant sous la forme p/q
$\mathbb{R}$ = l'ensemble des nombres réels
$\mathbb{C}$ = l'ensemble des nombres complexes : $a + b\,i$ (perte de la relation d'ordre totale : $<, >$)
$\mathbb{H}$ = l'ensemble des quaternions : $a + b\,i + c\,j + d\,k$ (perte de la commutativité)
$\mathbb{O}$ = l'ensemble des octonions (perte de l'associativité)
$\vdots$

1.2 Nombre complexe

Un nombre complexe, noté z, est une expression de la forme $z = x + i\,y$ où x et y sont réels et tel que $i^2 = -1$.

On écrit

$$\begin{aligned} x &= Re(z), \text{ la partie réelle du nombre complexe } z, \\ y &= Im(z), \text{ la partie imaginaire de } z. \end{aligned}$$

Le conjugué de $z = x + iy$, noté $\overline{z}$ ou z^*, est définie par $\overline{z} = x - iy$.

Notons qu'un nombre complexe $z = x + i\,y$ est dit un nombre imaginaire pur lorsque la partie réelle x est nulle.
Par exemple : i, -i et 0 sont des imaginaires purs.

1.3 Opération de base

En effectuant des opérations avec des nombres complexes nous pouvons procéder de la même façon qu'avec les nombres réels en tenant compte que $i^2 = -1$.

1. Égalité : $a + ib = c + id \iff a = c$ et $b = d$

2. Addition et soustraction : $(a + ib) \pm (c + id) = (a \pm c) + i(b \pm d)$

3. Multiplication : $(a + ib)(c + id) = (ac - bd) + (ad + bc)i$

4. Division : $\dfrac{a + ib}{c + id} = \dfrac{(a + ib)(c - id)}{(c + id)(c - id)} = \dfrac{(ac + bd)}{c^2 + d^2} + i\dfrac{(bc - ad)}{c^2 + d^2}$

1.4 Propriétés de la conjuguée

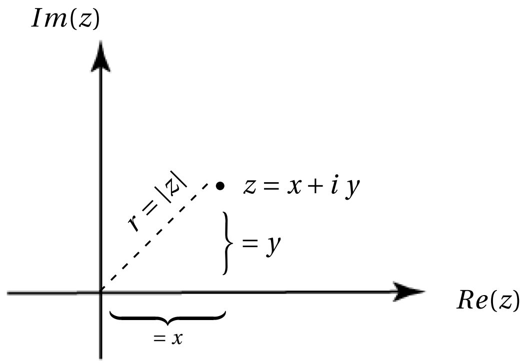
P.1 $\overline{(z_1 \pm z_2)} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$

P.2 $\overline{(z_1 z_2)} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$

P.3 $\overline{(\frac{z_1}{z_2})} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

P.4 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons : $\overline{z^n} = \overline{z}^n$

1.5 Plan complexe (diagramme d'Argand-Cauchy)



Le corps des nombres complexes, noté $\mathbb{C}$, est définie par

$$\mathbb{C} = \left\{(x + i\,y) : x, y \in \mathbb{R}\right\}.$$

Le nombre $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ s'appelle le module (ou la valeur absolue) de z.
On écrit $r = |z|$.

1.6 Propriétés du module

P.1 $|\overline{z}| = |z|$

P.2 $z\overline{z} = |z|^2$

P.3 $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$

P.4 $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$

1.7 Inégalité du triangle

Soit z_1 et $z_2 \in \mathbb{C}$. Alors

- $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

  Avant-propos :

  Soit $\qquad z_1 = x_1 + i\,y_1 \qquad$ et $\qquad z_2 =_2 + i\,y_2$

  Alors
$$
\begin{aligned}
\overline{z_1} &= x_1 - i\,y_1 \\
\overline{z_2} &= x_2 - i\,y_2 \\
z_1\overline{z_2} &= x_1x_2 - i\,x_1y_2 + i\,y_1x_2 + y_1y_2 \\
Re(z_1\overline{z_2}) &= x_1x_2 + y_1y_2 \\
\overline{z_1}z_2 &= x_2x_1 - i\,x_2y_1 + i\,y_2x_1 + y_2y_1 \\
z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2 &= 2(x_1x_2 + y_1y_2) = 2Re(z_1\overline{z_2}) \\
\left|z_1\overline{z_2}\right| &= \sqrt{(x_1x_2 + y_1y_2)^2 + (x_2y_1 + y_2x_1)^2}
\end{aligned}
$$
  D'où
$$
Re(z_1\overline{z_2}) \leq \left|z_1\overline{z_2}\right| = \left|z_1\right|\,\left|\overline{z_2}\right|
$$

  Preuve.

  Par la propriété *P*.2, nous avons
$$
\begin{aligned}
\left|z_1 + z_2\right|^2 &= (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) \\
&= (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2}) \\
&= z_1\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} + \underbrace{z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2} \\
&= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\underbrace{Re(z_1\overline{z_2})}_{\leq\left|z_1\overline{z_2}\right|} \\
&\leq \left|z_1\right|^2 + \left|z_2\right|^2 + 2\left|z_1\right|\cdot\left|\overline{z_2}\right| = \left(\left|z_1\right| + \left|z_2\right|\right)^2
\end{aligned}
$$
  Ainsi
$$
\left|z_1 + z_2\right|^2 \leq \left(\left|z_1\right| + \left|z_2\right|\right)^2
$$

  En prenant la partie non-négative de la racine carrée, on obtient l'inégalité :
$$
\left|z_1 + z_2\right| \leq \left|z_1\right| + \left|z_2\right|
$$
  □

- $\Big||z_1| - |z_2|\Big| \leq |z_1| + |z_2|$

Preuve.

En considérant que A est réel et $R > 0$, alors

$$|A| \leq R \iff -R \leq A \leq R. \qquad (\star)$$

Ainsi :

$$|z_1| = |z_1 + z_2 - z_2| \quad \leq \quad |z_1 + z_2| + \underbrace{|-z_2|}_{=|z_2|} \qquad \Longrightarrow \underbrace{|z_1| - |z_2| \leq |z_1 + z_2|}_{=b}$$

de même $$|z_2| = |z_2 + z_1 - z_1| \quad \leq \quad |z_1 + z_2| + \underbrace{|-z_1|}_{=|z_1|} \qquad \Longrightarrow \underbrace{|z_2| - |z_1| \leq |z_1 + z_2|}_{=c}$$

En multipliant c par (-1), nous obtenons

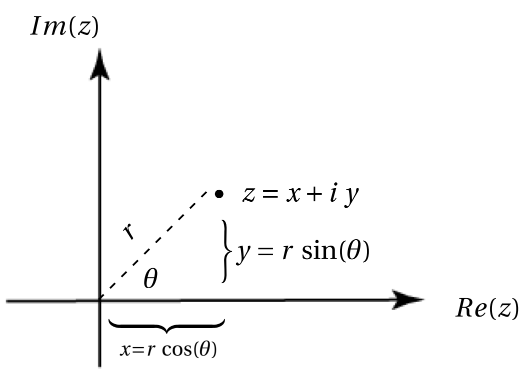
$$\underbrace{-|z_1 + z_2|}_{=-R} \quad \leq \quad \underbrace{|z_1| - |z_2|}_{=A} \underbrace{\leq}_{par\, b} \underbrace{|z_1 + z_2|}_{=R}$$

En utilisant la relation ($\star$), nous obtenons

$$\Big||z_1| - |z_2|\Big| \leq |z_1| + |z_2|$$

□

1.8 Forme polaire



$$\begin{aligned} z &= x + iy \\ &= r\,cos(\theta) + i\,r\,sin(\theta) \\ &= r\,(cos(\theta) + i\,sin(\theta)) \end{aligned}$$

Note $cis(\theta) = cos(\theta) + i\,sin(\theta)$

On dit que θ est l'argument de z : $\theta = arg(z)$. La valeur principale de l'argument satisfait $-\pi < \theta \leq \pi$; on écrit parfois $\theta = Arg(z)$.

En considérant

$$\begin{aligned} z_1 &= r_1\,[\cos(\theta_1) + i\ \sin(\theta_1)] \\ z_2 &= r_2\,[\cos(\theta_2) + i\ \sin(\theta_2)] \end{aligned}$$

et la relation trigonométrique

$$\cos(a \pm b) = \cos(a)\cos(b) \mp \sin(a)\sin(b),$$

il est possible de démontrer les expressions :

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2\,[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\ \sin(\theta_1 + \theta_2)] \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1}{r_2}\,[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\ \sin(\theta_1 - \theta_2)] \\ arg(z_1 z_2) &= arg(z_1) + arg(z_2) \\ arg(\frac{z_1}{z_2}) &= arg(z_1) - arg(z_2) \end{aligned}$$

1.9 Formule d'Euler

$$\boxed{e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\ \sin(\theta) \qquad \text{Valable } \forall\theta \in \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}}$$

Preuve.

$$
\begin{aligned}
e^{i\theta} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k \theta^k}{k!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{2n}\theta^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{2n+1}\theta^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\theta^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\theta^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
&= \cos(\theta) + i\ \sin(\theta)
\end{aligned}
$$

On peut donc écrire

$$
\begin{aligned}
z &= r\,[\cos(\theta) + i\ \sin(\theta)] = r\ e^{i\theta} \\
\overline{z} &= r\ e^{-i\theta} \\
|e^{i\theta}| &= 1,\ \forall\theta \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

En utilisant la relation $z = r\ e^{i\theta}$, voici quelques nombres exprimés sous forme exponentielle.

$$
\begin{aligned}
i &= e^{i\,\frac{\pi}{2}} \\
-1 &= e^{i\,\pi} \\
1+i &= \sqrt{2}\ e^{i\,\frac{\pi}{4}} \\
1 &= e^{i\,(0+2\,k\,\pi)}, \qquad \forall k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}
$$

Remarque.
Puisque

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\ \sin(\theta)$$

et

$$e^{-i\theta} = \cos(\theta) - i\ \sin(\theta)$$

alors

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2\,i}$$

En substituant θ par i, nous obtenons :

$$\cos(\,i\,) = \frac{e^{i\,i} + e^{-i\,i}}{2} = \frac{e^{-1} + e^{1}}{2} \simeq 1.543080635 > 1$$

En conclusion, sur le corps des complexes, les fonctions sin et cos peuvent prendre des valeurs en dehors de l'intervalle $[-1,1]$.

1.10 Formule de De Moivre

Pour tout nombre $\theta \in \mathbb{R}$ et pour tout nombre entier $n \in \mathbb{Z}$,

$$\boxed{\Big(\cos(\theta) + i\ \sin(\theta)\Big)^n = \cos(n\theta) + i\ \sin(n\theta)}$$

Preuve.

$$\begin{aligned}\Big(\cos(\theta) + i\ \sin(\theta)\Big)^n &= (e^{i\theta})^n = \underbrace{e^{i\theta}\, e^{i\theta} \cdots e^{i\theta}}_{\text{n fois}} \\ &= e^{i\,n\theta} \\ &= \cos(n\theta) + i\ \sin(n\theta)\end{aligned}$$

□

1.11 Racines d'un nombre complexe

Définition 1.1. *Soient a et b deux nombres réels connus. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on appelle **racine n-ième** du nombre complexe $a + b\,i$ tout nombre complexe z tel que*

$$z^n = a + b\,i. \qquad \text{(Polynôme de degré } n \text{)}$$

*En particulier, on appelle **racine n-ième de l'unité** ($\sqrt[n]{1}$) tout nombre complexe z vérifiant*

$$z^n = 1.$$

Pour rechercher les racines n-ième de $a + i\,b$, il suffit de d'exprimer $a + i\,b$ sous forme exponentielle. C'est-à-dire,

$$\begin{aligned} z^n &= a + i\,b \\ &= |a + i\,b|\ e^{i\,\theta} = |a + i\,b|\ e^{i\,(\theta + 2k\pi)}, \quad k \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

et de déduire déduire les n racines :

$$z_k = |a + i\,b|^{\frac{1}{n}}\ e^{\frac{i\,(\theta+2k\pi)}{n}} \text{ avec } k = 0, 1, 2, \ldots, (n-1).$$

Exemple 1.1. *Trouvez les racines quatrièmes du nombre complexe -1. C'est-à-dire $\sqrt[4]{-1}$.*

Solution.
Posons $\sqrt[4]{-1} = z$ *. Ainsi*

$$\begin{aligned} z^4 &= -1 \\ &= |-1|\, e^{i\,(\pi+2k\pi)} \qquad \text{où } k \in \mathbb{Z} \\ \left(z^4\right)^{\frac{1}{4}} &= \left(1\, e^{i\,(\pi+2k\pi)}\right)^{\frac{1}{4}} \qquad \text{où } k \in \mathbb{Z} \\ \Rightarrow z_k &= e^{\frac{i\,(\pi+2k\pi)}{4}} \qquad \text{où } k = 0,1,2,3. \end{aligned}$$

Sous forme cartésienne, les 4 racines z_k *sont :*

- *Pour* $k = 0$,

$$z_0 = e^{\frac{i\,(\pi+2\cdot 0\pi)}{4}} = \cos(\frac{\pi}{4}) + i\sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

- *Pour* $k = 1$,

$$z_1 = e^{\frac{i\,(\pi+2\cdot 1\pi)}{4}} = \cos(\frac{3\pi}{4}) + i\sin(\frac{3\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

- *Pour* $k = 2$,

$$z_2 = e^{\frac{i\,(\pi+2\cdot 2\pi)}{4}} = \cos(\frac{5\pi}{4}) + i\sin(\frac{5\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

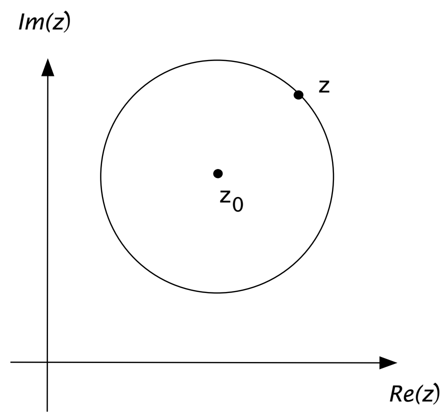
- *Pour* $k = 3$,

$$z_3 = e^{\frac{i\,(\pi+2\cdot 3\pi)}{4}} = \cos(\frac{7\pi}{4}) + i\sin(\frac{7\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Remarque : Lorsqu'un polynôme (ici $z^4 + 1 = 0$*) est à coefficients réels alors si* z_0 *est une racine complexe alors sa conjuguée* $\overline{z}_0$ *est aussi une racine.*

1.12 Courbes et région

La relation $|z-z_0| = \rho$ représente la circonférence d'un cercle de rayon ρ , centré au point z_0.



Preuve.

Soit $z = x + iy$ et $z_0 = x_0 + iy_0$.

Alors

$$|z-z_0|^2 = \rho^2 \iff |(x-x_0)+i(y-y_0)|^2 = \rho^2$$
$$\iff (x-x_0)^2+(y-y_0)^2 = \rho^2$$

L'inégalité $|z-z_0| < \rho$ représente l'intérieur du cercle (un disque ouvert). Les relations $Re(z) = 1$ et $Re(z) = 2$ représentent des droites. Les inégalités $Re(z) > 1$ et $Re(z) > 2$ représentent des demi-plans.