Chapitre 8

Calcul des résidus

Le théorème des résidus en analyse complexe est un outil puissant pour évaluer des intégrales curvilignes de fonctions analytiques sur des courbes fermées ; il peut aussi bien être utilisé pour calculer des intégrales de fonctions réelles ainsi que la somme de certaines séries. Il généralise le théorème intégral de Cauchy et la formule intégrale de Cauchy.

Soit $f(z)$ une fonction analytique au voisinage de z_0, sauf pour $z = z_0$ que l'on suppose une singularité isolée. Nous avons la série de Laurent :

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \qquad 0 < |z-z_0| < R. \\ &= \cdots + \frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{(z-z_0)^1} + a_0 + a_1(z-z_0) + \cdots \end{aligned}$$

où $$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\, dz$$

Ici C est une courbe fermée, contenant z_0 à l'intérieur du voisinage (et ne contenant aucune autre singularité).

Dans le cas particulier où $n = -1$, le coefficients a_{-1} s'appelle le **résidu** de $f(z)$ au point z_0 et on écrit

$$a_{-1} \overset{\text{déf.}}{=} Rés\,(f(z)\,;z = z_0).$$

Nous avons

$$Rés\,(f(z)\,;z = z_0) \overset{\text{déf.}}{=} a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z)\, dz$$

Par conséquent, nous avons, pour une seule singularité z_0 :

$$\oint_C f(z)\,dz \;=\; 2\pi\, i \cdot a_{-1} \;=\; 2\pi\, i \cdot Rés\,(f(z)\,; z = z_0)$$

Le calcul se fait différemment selon que la singularité z_0 est un pôle ou une singularité essentielle.

8.1 Calcul du résidu pour un pôle

Théorème 8.1. *Si z_0 est un pôle d'ordre m alors*

$$\boxed{a_{-1} = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} (z-z_0)^m f(z)}$$

Notons que si z_0 est un pôle d'ordre $m = 1$ alors

$$a_{-1} = \lim_{z \to z_0} (z-z_0) f(z).$$

Preuve. Puisque z_0 est un pôle d'ordre m alors la série de Laurent devient

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m} + \frac{a_{-m+1}}{(z-z_0)^{m-1}} + \cdots + \frac{a_{-1}}{(z-z_0)} + a_0 + a_1(z-z_0) + \cdots \\
(z-z_0)^m f(z) &= a_{-m} + a_{-m+1}(z-z_0) + \cdots a_{-2}(z-z_0)^{m-2} + a_{-1}(z-z_0)^{m-1} + a_0(z-z_0)^m \\
&\quad + a_1(z-z_0)^{m+1} + \cdots
\end{aligned}$$

Ainsi en dérivant de façon successive, nous avons :

$$\begin{aligned}
\frac{d^1}{dz^1}\Big((z-z_0)^m f(z)\Big) &= a_{-m+1} + \cdots (m-2)a_{-2}(z-z_0)^{m-3} + (m-1)a_{-1}(z-z_0)^{m-2} \\
&\quad + m\, a_0(z-z_0)^{m-1} + (m+1)a_1(z-z_0)^m + \cdots \\
\frac{d^2}{dz^2}\Big((z-z_0)^m f(z)\Big) &= \cdots (m-2)(m-3)a_{-2}(z-z_0)^{m-4} + (m-1)(m-2)a_{-1}(z-z_0)^{m-3} \\
&\quad + m(m-1)\, a_0(z-z_0)^{m-2} + (m+1)m a_1(z-z_0)^{m-1} + \cdots \\
\frac{d^3}{dz^3}\Big((z-z_0)^m f(z)\Big) &= \cdots + (m-2)(m-3)(m-4)a_{-2}(z-z_0)^{m-5} \\
&\quad + (m-1)(m-2)(m-3)a_{-1}(z-z_0)^{m-4} \\
&\quad + m(m-1)(m-2)\, a_0(z-z_0)^{m-3} + (m+1)m(m-1)a_1(z-z_0)^{m-2} + \cdots \\
&\ \ \vdots \\
\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\Big((z-z_0)^m f(z)\Big) &= (m-1)!\, a_{-1} + m!\, a_0(z-z_0) + \cdots
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\lim_{z \to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\Big((z-z_0)^m f(z)\Big) = (m-1)!\, a_{-1}$$

D'où

$$a_{-1} = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left((z-z_0)^m f(z) \right)$$

$\square$

Exemple 8.1. *La fonction* $f(z) = \dfrac{z}{(z-1)(z+1)^2}$ *possède deux singularités en* $z_0 = 1$ *et* $z_1 = -1$ *qui sont respectivement des pôles d'ordre 1 et 2. Ainsi le résidu pour chacune des singularités est :*

- *Pour* $z_0 = 1$

$$\text{Rés}(f(z), z=1) = \frac{1}{(1-1)!} \lim_{z\to 1} \frac{d^{1-1}}{dz^{1-1}} \left((z-1)^1 \frac{z}{(z-1)(z+1)^2} \right) = \frac{1}{4}$$

- *Pour* $z_1 = -1$

$$\text{Rés}(f(z), z=-1) = \frac{1}{(2-1)!} \lim_{z\to -1} \frac{d}{dz} \left[(z+1)^2 \frac{z}{(z-1)(z+1)^2} \right] = \lim_{z\to -1} \frac{d}{dz} \left[\frac{z}{z-1} \right] = -\frac{1}{4}$$

8.2 Calcul d'un résidu à l'aide de la série de Laurent

La technique consiste à développer la fonction $f(z)$ en série de Laurent et de déduire la valeur du coefficient a_{-1}. Cette technique est valable autant pour un pôle que pour une singularité essentielle.

Exemples

1. Le résidu de la fonction $f(z) = z e^{\frac{1}{z}}$, au point $z_0 = 0$ (singularité essentielle), est $\frac{1}{2}$ car

$$z e^{1/z} = z + 1 + \frac{1}{2z} + \frac{1}{3!\, z^2} + \cdots, \qquad 0 < |z| < \infty$$

Donc

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} z e^{\frac{1}{z}} \, dz$$

2. Le résidu de la fonction $f(z) = \frac{\sin(z)}{z^3}$, au point $z_0 = 0$ (pôle d'ordre 2), est 0 car

$$\begin{aligned} \frac{\sin(z)}{z^3} &= \frac{1}{z^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n-2}}{(2n+1)!} \\ &= \frac{1}{z^2} - \frac{1}{6} + \cdots \end{aligned}$$

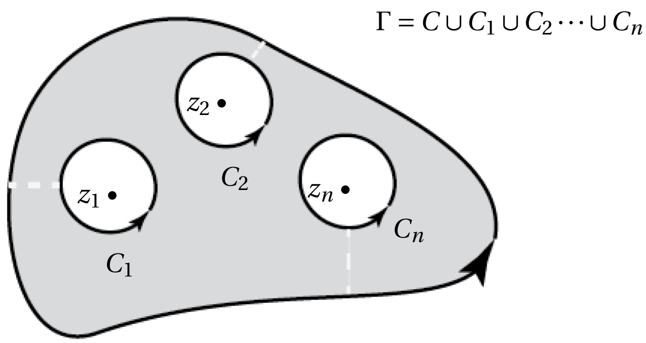
3. Le résidu la fonction $f(z) = \frac{(z^3 + z^2 + 2z + 1)\cos(\pi z)}{(z-1)(z-2)}$, au point $z_0 = 1$ (pôle d'ordre 1), est 5 car

$$a_{-1} = \frac{1}{(1-1)!} \lim_{z \to 1} \frac{d^{1-1}}{dz^{1-1}} \left[(z-1)^1 \frac{(z^3 + z^2 + 2z + 1)\cos(\pi z)}{(z-1)(z-2)} \right] = 5$$

Théorème 8.2. ***Théorème des résidus***
Supposons que $f(z)$ soit analytique à l'intérieur et sur une courbe fermée C, sauf aux points $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_n$ qui sont des singularités isolées. Alors

$$\boxed{\oint_C f(z)\, dz = 2\pi i \cdot \sum_{i=1}^{n} Rés\,(f(z)\,; z = z_i)}$$

Preuve. Soit



Considérons le domaine à l'intérieur de C pour lequel on enlève tous les domaines entourant les singularités. Par conséquent la fonction $f(z)$ est analytique à l'intérieur de Γ et sur la frontière de Γ. Ainsi nous avons par le théorème de Cauchy

$$\begin{aligned} 0 &= \oint_{\Gamma} f(z)\,dz \\ &= \oint_{C} f(z)\,dz - \sum_{k=1}^{n} \oint_{C_k} f(z)\,dz \\ &= \oint_{C} f(z)\,dz - \sum_{k=1}^{n} 2\pi i \text{Rés}(f(z); z = z_k). \end{aligned}$$

donc
$$\oint_{C} f(z)\,dz = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^{n} \text{Rés}(f(z); z = z_k).$$

□

Exemple 8.2. *Évaluez* $I = \oint_{C} \frac{1}{z(z-1)(z-3)}\,dz,$ *où C est le cercle :*

a) $|z| = 2$
b) $|z| = 4.$

Solution

Les singularités de la fonction

$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)(z-3)}$$

sont : $z_0 = 0, z_1 = 1, z_2 = 3$ *(tous des pôles d'ordre 1)* *a) Pour le cercle $|z| = 2$, il y a seulement z_0 et z_1 qui sont à l'intérieur du cercle. Donc*

$$2\pi i \cdot \Big[\underbrace{Rés(\frac{1}{z(z-1)(z-3)}; z_0 = 0)}_{=\frac{1}{(1-1)!}\lim_{z\to 0}\frac{(z-0)^1}{z(z-1)(z-3)} = \frac{1}{3}} + \underbrace{Rés(\frac{1}{z(z-1)(z-3)}; z_1 = 1}_{=\frac{1}{(1-1)!}\lim_{z\to 1}\frac{(z-1)^1}{z(z-1)(z-3)} = -\frac{1}{2}} \Big] = -\frac{\pi}{3} i$$

b) Pour $|z| = 4$, la singularité $z_2 = 3$ vient s'ajouter. Donc

$$I = 2\pi i \cdot \Big[\frac{1}{3} + (\frac{-1}{2}) + \underbrace{Rés(\frac{1}{z(z-1)(z-3)}; z_2 = 3}_{=\frac{1}{(1-1)!}\lim_{z\to 3}\frac{(z-3)^1}{z(z-1)(z-3)} = \frac{1}{6}} \Big] = 0$$

Exemple 8.3. *Évaluez* $I = \oint_{|z|=2} \frac{\tan(z)}{z(z-3)}\, dz.$

Solution

La singularité $z_0 = 0$ est à rejeter car c'est une singularité apparente puisque

$$\lim_{z\to 0} \frac{\tan(z)}{z} = 1 \qquad \text{existe.}$$

Ainsi nous n'avons que la singularité $z_1 = 3$ qui est un pôle d'ordre 1.
Par contre, comme

$$f(z) = \frac{\tan(z)}{z(z-3)} = \frac{\sin(z)}{\cos(z)\, z(z-3)},$$

Les singularités sont

$$z_2 = 3, \text{et } \pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

En retenant que les singularités à l'intérieur du cercle $|z| = 2$, nous n'avons que

$$z_0 = \frac{\pi}{2},\ z_1 = -\frac{\pi}{2}$$

Ces singularité sont tous des pôles d'ordre 1 car

- *Pour $z_0 = \frac{\pi}{2}$*

$$\begin{aligned} Rés(f(z) : z = z_0) &= \frac{1}{(1-1)!} \lim_{z\to\frac{\pi}{2}} \frac{d^{1-1}}{dz^{1-1}} \left[\frac{(z-\frac{\pi}{2})^1 \tan(z)}{z(z-3)} \right] \\ &= \lim_{z\to\frac{\pi}{2}} \frac{(z-\frac{\pi}{2})}{z(z-3)} \left[-\frac{1}{(z-\frac{\pi}{2})} + \frac{1}{3}(z+\frac{\pi}{2}) + \frac{1}{45}(z+\frac{\pi}{2})^3 + \cdots \right] \\ &= \frac{-4}{\pi^2 - 6\pi} \end{aligned}$$

- *Pour* $z_1 = -\frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned}
Rés(f(z) : z = -\frac{\pi}{2}) &= \frac{1}{(1-1)!} \lim_{z \to \frac{-\pi}{2}} \frac{d^{1-1}}{dz^{1-1}} \left[\frac{(z - \frac{\pi}{2})^1 \tan(z)}{z(z-3)} \right] \\
&= \lim_{z \to -\frac{\pi}{2}} \frac{(z - \frac{\pi}{2})}{z(z-3)} \left[-\frac{1}{(z - \frac{\pi}{2})} + \frac{1}{3}(z - \frac{\pi}{2}) + \frac{1}{45}(z - \frac{\pi}{2})^3 + \cdots \right] \\
&= \frac{-4}{\pi^2 + 6\pi}
\end{aligned}$$

$$\lim_{z \to -\frac{\pi}{2}} \frac{(z + \frac{\pi}{2})^1 \tan(z)}{z(z-3)} = \lim_{z \to \frac{\pi}{2}} \frac{(z + \frac{\pi}{2})}{z(z-3)} \left[-\frac{1}{(z + \frac{\pi}{2})} + \frac{1}{3}(z + \frac{\pi}{2}) + \frac{1}{45}(z + \frac{\pi}{2})^3 + \cdots \right] = \frac{-4}{\pi^2 + 6\pi} \neq 0$$

Par conséquent

$$I = 2\pi i \left[\frac{-4}{\pi^2 - 6\pi} + \frac{-4}{\pi^2 + 6\pi} \right] = \frac{16\pi i}{-\pi^2 + 36}$$

La notion de résidus permet également de calculer la valeur de certaines intégrales.

Exemple 8.4. *Par la méthode des résidus, nous savons que*

$$\oint_{|z-1|=1} \frac{1}{(z^2 - 1)} \, dz = \pi i$$

En paramétrisant le cercle, nous avons

$$\begin{aligned}
z(\theta) &= 1 + 1 \cdot e^{i\theta} \\
dz &= i\, e^{i\theta} \, d\theta \\
z^2 &= (1 + e^{i\theta})^2 = 1 + 2\, e^{i\theta} + e^{i2\theta} \\
z^2 - 1 &= e^{i\theta}(2 + e^{i\theta})
\end{aligned}$$

Ainsi nous avons

$$\begin{aligned}
\pi i &= \oint_0^{2\pi} \frac{i\, e^{i\theta}}{e^{i\theta}(2 + e^{i\theta})} \, d\theta = \oint_0^{2\pi} \frac{i}{(2 + e^{i\theta})} \frac{(2 + e^{-i\theta})}{(2 + e^{-i\theta})} \, d\theta \\
&= i \oint_0^{2\pi} \frac{2 + \cos(\theta) - i \sin(\theta)}{5 + 4\cos(\theta)} \, d\theta \\
\pi i &= i \oint_0^{2\pi} \frac{2 + \cos(\theta)}{5 + 4\cos(\theta)} \, d\theta + \oint_0^{2\pi} \frac{\sin(\theta)}{5 + 4\cos(\theta)} \, d\theta
\end{aligned}$$

Par comparaison des parties réelles et imaginaires, nous obtenons

$$\oint_{0}^{2\pi} \frac{2+\cos(\theta)}{5+4\cos(\theta)}\, d\theta = \pi \qquad \text{et} \qquad \oint_{0}^{2\pi} \frac{\sin(\theta)}{5+4\cos(\theta)}\, d\theta = 0$$