8.3 Application des résidus au calcul des intégrales réelles

8.3.1 Intégrales trigonométriques

On considère des intégrales de la forme

$$\int_0^{2\pi} F(\sin(\theta), \cos(\theta))\, d\theta$$

Posons $z = e^{i\theta}$ d'où $z^{-1} = e^{-i\theta}$. Par conséquent, nous savons par la formule d'Euler que

$$\sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \frac{z - z^{-1}}{2\,i} \qquad \text{et} \qquad \cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{z + z^{-1}}{2}$$

De plus, lorsque $0 \le \theta \le 2\pi$, alors $e^{i\theta}$ décrit un cercle de rayon 1 centré à l'origine. On a donc

$$\int_0^{2\pi} F(\sin(\theta), \cos(\theta))\, d\theta = \oint_{|z|=1} F\Big(\frac{z - z^{-1}}{2\,i}, \frac{z + z^{-1}}{2}\Big)\, \frac{dz}{iz}$$

On peut donc évaluer cette dernière intégrale à l'aide des résidus.

Exemple 8.5. *Évaluez* $J = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{2 + \cos(\theta)}\, d\theta.$

Solution

Puisque $\cos(\theta) = \dfrac{z + z^{-1}}{2}$, $z = e^{i\theta} \to dz = ie^{\theta} d\theta \to d\theta = \dfrac{dz}{iz}$ *alors*

$$\begin{aligned} J &= \oint_{|z|=1} \frac{1}{2 + \left(\frac{z + z^{-1}}{2}\right)} \frac{dz}{iz} = -i \oint_{|z|=1} \frac{1}{2z + \left(\frac{z^2 + 1}{2}\right)}\, dz \\ &= -2\,i \oint_{|z|=1} \frac{1}{z^2 + 4z + 1}\, dz \end{aligned}$$

Puisque

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + 4z + 1} = \frac{1}{(z - z_1)(z - z_2)} \qquad \text{où } z_1 = -2 + \sqrt{3} \text{ et } z_2 = -2 - \sqrt{3}$$

Notons que les singularités z_1 et z_2 sont des pôles d'ordre 1 de f.
Parmi ces singularités seule z_1 est situé à l'intérieur du cercle $|z| = 1$. Ainsi

$$J = -2i \oint_{|z|=1} \frac{1}{z^2 + 4z + 1}\, dz = -2i \cdot (2\pi i \cdot Rés(f, z = z_1)) = 4\pi \lim_{z \to z_1} (z - z_1)^1 f(z) = \frac{4\pi}{z_1 - z_2} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

8.3.2 Intégrales du type $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$

Hypothèses de base :

- On suppose que $f(z)$ n'a pas de singularité sur l'axe réel ;
- Que $f(z)$ possède un nombre fini de singularités, notée z_k, dans le plan complexe ;
- Que $\left|f(z)\right| \leq \dfrac{k}{|z|^2}$ où $k > 0$ est une constante, pour $|z|$ assez grand.

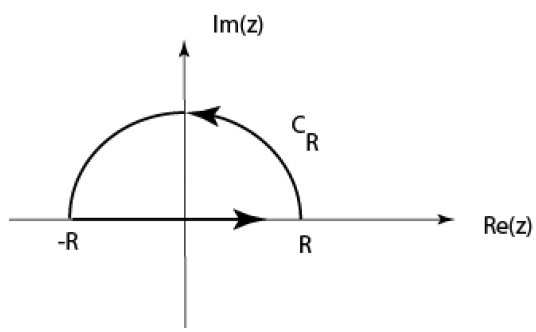
Alors

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{Im(z_k)>0} Rés(f(z); z = z_k)}$$

Démonstration.

Étapes :

1. Soit une courbe fermée C composée d'un segment $[-R, R]$ avec $R \in \mathbb{R}$ et d'un demi-cercle de rayon R, noté C_R, et orienté positivement telle qu'illustrée à la figure suivante.



2. Remplacer x par z dans $f(x)$ pour obtenir $f(z)$.
3. En sachant que

$$\underbrace{\oint_C f(z)\,dz}_{①} = \underbrace{\int_{\underbrace{[-R,R]}_{segment}} f(z)dz}_{\text{Ici } z=x+i\cdot 0} + \int_{C_R} f(z)\,dz$$

développer ① en utilisant le résultat :

$$\boxed{\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i \cdot \sum_{i=1}^{n} Rés\,(f(z)\,;z = z_i)}$$

En prenant la limite de chaque côté de l'équation, nous avons

$$\underbrace{\lim_{R\to\infty}\oint_C f(z)\,dz}_{\oint_C f(z)\,dz} = \underbrace{\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(x)dx}_{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx} + \lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)\,dz \tag{8.3.1}$$

4) En utilisant l'hypothèse $|f(z)| \leq \dfrac{k}{|z|^2}$ et le fait que sur la courbe C_R, on a $z = Re^{i\theta}$ alors

$$\begin{aligned} \int_{C_R} f(z)\,dz &= \int_{\theta=0}^{\pi} f(Re^{i\theta})iRe^{i\theta}\,d\theta \\ \Longrightarrow \left|\int_{C_R} f(z)\,dz\right| &= \left|\int_{\theta=0}^{\pi} f(Re^{i\theta})iRe^{i\theta}\,d\theta\right| \leq \int_{\theta=0}^{\pi} |f(Re^{i\theta})|\,|i|R|e^{i\theta}|\,d\theta \\ &\leq \int_{\theta=0}^{\pi} \frac{k}{R^2}\cdot R\,d\theta = \frac{\pi K}{R} \end{aligned}$$

Ainsi $\quad \displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)\,dz = 0$

5) En remplacant la valeur des termes, nous obtenons

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi i\sum_{k=1}^{n} Rés(f(z), z = z_k) \qquad \text{où } Im(z_k) > 0$$

Remarque Si le demi disque est dans le plan inférieur alors

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = -2\pi i \sum_{Im(z_k)<0} Rés(f(z); z = z_k)}$$

Exemple 8.6. *Calculez* $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^3}\,dx$

Solution

Étapes :

1) Considérons courbe $C = [-R, R] \cup C_R$ *telle qu'illustrée à la figure ci-haute.*

2) Puisque $f(x) = \dfrac{1}{(1+x^2)^3}$ *alors en remplacant x par z, on obtient :*

$$f(z) = \frac{1}{(1+z^2)^3} = \frac{1}{((z-i)(z+i))^3} = \frac{1}{(z-i)^3(z+i)^3}$$

Notons que les singularités de $f(z)$ *sont* $z_1 = i$ *et* $z_2 = -i$ *(pôles d'ordre* $m = 3$*)*

3) Puisque la courbe C est fermée et que la fonction $f(z)$ *possède seulement une* *singularité ($z_1 = i$) à l'intérieur de C alors en vertu du théorème des résidus, nous avons*

$$
\begin{aligned}
\oint_C f(z)\,dz &= 2\pi i \cdot \sum_{i=1}^{n=1} Rés\,(f(z)\,;z=z_i) = 2\pi i \cdot Rés\,(f(z)\,;z=i) \\
&= 2\pi i \cdot \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z\to z_1} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\Big((z-z_1)^m f(z)\Big) \quad \text{et avec } m=3 \\
&= 2\pi i \cdot \frac{1}{(3-1)!} \lim_{z\to i} \frac{d^{3-1}}{dz^{3-1}}\left((z-i)^3 \frac{1}{(z-i)^3(z+i)^3}\right) \\
&= \frac{3}{8}\pi
\end{aligned}
$$

*Ainsi par la relation (*8.3.1*), nous avons :*

$$
\underbrace{\oint_C f(z)\,dz}_{=\frac{3}{8}\pi} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^3}\,dx + \underbrace{\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} \frac{1}{(1+z^2)^3}\,dz}_{Ⓐ}
$$

4) Évaluons Ⓐ à l'aide de l'inégalité M L
Puisque

$$
0 \le \left| \int_{C_R} \frac{1}{(1+z^2)^3}\,dz \right| \le \int_{C_R} \left| \frac{1}{(1+z^2)^3}\,dz \right| = \int_{C_R} \left| \frac{1}{(1+z^2)^3} \right| \left| dz \right| = \int_{C_R} \frac{1}{\left|1+z^2\right|^3} \left| dz \right|
$$

or sur C, nous avons $z = Re^{i\theta}$ alors

$$
\begin{aligned}
dz &= iRe^{i\theta}\,d\theta \\
|dz| &= |i|\,|R|\,|e^{i\theta}|\,|d\theta| = R\,d\theta
\end{aligned}
$$

Et par l'inégalité du triangle $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 \pm z_2|$ *on a*

$$\underbrace{\left||1| - |z|^2\right|}_{=\underbrace{\left||z|^2 - 1\right|}_{\left|R^2-1\right|}} \leq \left|1 + z^2\right| \leq \underbrace{|1| + \left|z\right|^2}_{=1+R^2}$$

D'où
$$\left|R^2 - 1\right| \leq \left|1 + z^2\right|$$
$$\left|R^2 - 1\right|^3 \leq \left|1 + z^2\right|^3$$

Ainsi
$$\frac{1}{\left|R^2 - 1\right|^3} \geq \frac{1}{\left|1 + z^2\right|^3}$$

alors
$$\frac{1}{\left|1 + z^2\right|^3} \leq \frac{1}{\left|R^2 - 1\right|^3}$$

$$0 \leq \lim_{R\to\infty} \int_{C_R} \frac{1}{\left|1 + z^2\right|^3} \left|dz\right| \leq \lim_{R\to\infty} \int_{\theta=0}^{\pi} \frac{Rd\theta}{\left|R^2 - 1\right|^3} = \lim_{R\to\infty} \frac{\pi R}{(R^2-1)^3} \overset{R-H}{=} 0$$

5) Par conséquent

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1 + x^2)^3}\, dx = \frac{3}{8}\pi$$

8.3.3 Intégrales de Fourier

Définition 8.1. *Une intégrale est dite* ***intégrale de Fourier*** *lorsqu'elle est de la forme*

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(z)\, e^{i\,a\,z}\, dz$$

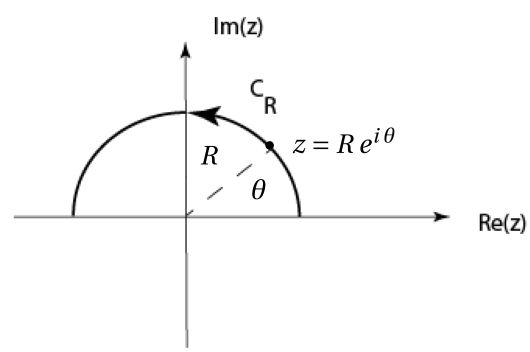
Ces intégrales apparaissent dans la transformée de Fourier que nous étudierons plus loin.

On suppose que $a > 0$ et que $g(z)$ a un nombre fini de singularités dans le plan complexe et aucune singularité sur l'axe réel. On suppose également que $\lim_{|z|\to\infty} g(z) = 0$.

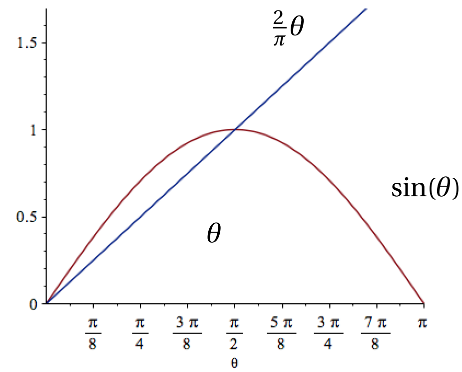
Théorème 8.3. *(Lemme de Jordan)*
Soit C_R le demi-cercle défini par $|z| = R$ et tel que $0 \leq arg(z) \leq \pi$.
Si $\lim_{|z|\to\infty} g(z) = 0$ et $a > 0$ alors

$$\lim_{R\to\infty} \int_{|z|=R} g(z)\, e^{i\,a\,z}\, dz = 0$$

Preuve. Puisque nous avons une courbe C_R avec $|z| = R$ et $0 \leq arg(z) \leq \pi$, cela signifie que nous avons un demi-cercle de rayon R tel qu'illustré à la figure suivante



De plus, en observant le graphique ci-dessous

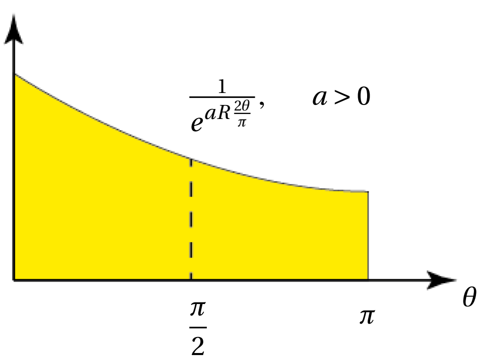


on constate que

$$\sin(\theta) \geq \frac{2\theta}{\pi} \qquad \text{pour } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

Ainsi puisque z appartient au demi-cercle, nous avons $z = R\,e^{i\theta}$ alors

$$\begin{aligned} |e^{i\,a\,z}| &= |e^{i\,a\,R\,e^{i\theta}}| \\ &= |e^{i\,a\,R[\cos(\theta)+i\sin(\theta)]}| = \underbrace{|e^{i\,a\,R\cos(\theta)}|}_{=1} \cdot |e^{-aR\sin(\theta)}| \\ &= \frac{1}{e^{aR\sin(\theta)}} \leq \frac{1}{e^{aR\frac{2\theta}{\pi}}} \end{aligned}$$



Donc

$$\begin{aligned}
\lim_{R\to\infty}\left|\int_{|z|=R} g(z)\, e^{i\,a\,z}\, dz\right| &\leq \lim_{R\to\infty}\int_0^{\pi} \underbrace{\left|g(R\,e^{i\theta})\right|}_{\leq\epsilon}\underbrace{\left|e^{i\,a\,R\,e^{i\theta}}\right|}_{\leq \frac{1}{e^{aR\frac{2\theta}{\pi}}}}\underbrace{\left|i R\, e^{i\theta}\right|}_{=R} d\theta. \\
&\leq \lim_{R\to\infty} \epsilon\, R \int_0^{\pi} \frac{1}{e^{aR\frac{2\theta}{\pi}}}\, d\theta \leq 2\,\epsilon \lim_{R\to\infty} R\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-aR\dfrac{2\theta}{\pi}}\, d\theta \\
&= \lim_{R\to\infty} \frac{\pi\,\epsilon}{a}\left[1-\frac{1}{e^{a\,R}}\right] \\
&= 0
\end{aligned}$$

□

Exemple 8.7. *Montrez que*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{x^2+1}\, dx = \frac{\pi}{e} \qquad \text{et} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x^2+1}\, dx = 0$$

Indice : Utilisez la relation $e^{i\,\alpha x} = \cos(\alpha x) + i\,\sin(\alpha x)$
Cet exercice sera fait en TD