Chapitre 12

Transformée de Laplace

Un peu d'histoire.

Pierre-Simon Laplace, célèbre mathématicien français (1749-1827). Laplace entra à l'université de Caen à 16 ans. Très vite il s'intéressa aux mathématiques et fut remarqué par d'Alembert. En analyse, il introduisit la fonction potentielle et les coefficients de Laplace. Il travailla également beaucoup sur les équations aux différences et sur les équations différentielles. Contrairement aux apparences, l'utilisation de la transformée de Laplace pour la résolution d'équations différentielles n'est pas due à Laplace, mais à Heaviside.

FIGURE 12.1 – Laplace

La transformée de Laplace est un outil mathématique qui permet de résoudre des équations différentielles linéaires à coefficients constants.

12.1 Introduction

La transformée de Laplace appartient à la famille très vaste des transformées intégrales, qui établissent une relation entre une fonction f et sa transformée F sous la forme :

$$F(\omega) \triangleq \int_I K(\omega, t)\, f(t)\, dt$$

Une transformée particulière nécessite donc la définition du noyau $K(\omega, t)$ et de l'intervalle d'intégration I. Les transformations les plus utilisées sont celles de :

• Fourier, pour laquelle on a :

$$I = \mathbb{R} \ \text{ et } K(\omega, t) = e^{-i\,\omega\,t}, \ \omega \in \mathbb{R};$$

• Laplace, pour laquelle on a :

$$I = \mathbb{R}^+ \ \text{ et } K(\underbrace{\omega}_{=s}, t) = e^{-s\,t}, \ s = \sigma + i\,\gamma \in \mathbb{C}.$$

où σ : sigma et γ : gamma.

Puisque s est une variable complexe, la tranformation de Laplace peut être vue comme une généralisation de la transformation de Fourier, restreinte aux fonctions définies sur $\mathbb{R}^+$.
Par la transformée de Laplace, les équations différentielles deviennent des équations algébriques, tandis que les équations aux dérivées partielles se transforment en des équations différentielles. Il en résulte une simplification efficace des problèmes qui permet souvent leur résolution analytique.

Définition 12.1. *Soit f une fonction de la variable réelle t, définie pour $t \geq 0$. Alors la transformée de Laplace de f, notée $\mathscr{L}\left\{f(t)\right\}$, lorsqu'elle existe, est la fonction F de la variable complexe s définie par :*

$$\boxed{F(s) = \mathscr{L}\left\{f(t)\right\} \overset{\text{déf}}{=} \int_{0^+}^{\infty} e^{-st} f(t)\,dt \qquad \text{où } s = \sigma + i\,\gamma.}$$

La borne de l'intégrale, $0^+ \equiv 0$ car $f(t)$ est définie en $t = 0$.

La transformée de Laplace inverse de $F(s)$, notée $\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}$, est telle que

$$f(t) \triangleq \mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}$$

Schématiquement, nous avons :

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge] f(t) \arrow[r, bend left, "\mathscr{L}\{f(t)\}"] & F(s) \arrow[l, bend left, "\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}"] \end{tikzcd}$$

Définition 12.2. *Une fonction f est dite continue par morceaux sur l'intervalle fini $[a,b]$ si*

- *il est possible de subdiviser l'intervalle $[a,b]$ en un nombre fini de sous-intervalles dans lesquels la fonction est continue ;*
- *$f(t)$ possède une limite **finie** (à gauche et à droite) à chaque extrémité des sous-intervalles.*

Conditions d'existence de $F(s)$.

Pour que la transformée de Laplace de f existe, il faut que la fonction $f(t)$ satisfasse les 3 conditions suivantes :

1. $f(t)$ doit être continue par morceaux pour tout intervalle fini [a,b] ;
2. $\exists\, \alpha$ avec $0 < \alpha < 1$ tel que $t^{\alpha}|f(t)| \to 0$ lorsque $t \to 0$;
3. $f(t)$ soit de type exponentiel σ avec $\sigma \in \mathbb{R}$ (condition suffisante mais non nécessaire). C'est-à-dire qu'il existe une constante m strictement positive et $\sigma \in \mathbb{R}$ tels que

$$|f(t)| \leq m\, e^{\sigma\, t} \qquad \text{pour tout} \quad t \geq t_0$$

Remarques :

- Certaines fonctions ne possèdent pas de transformée de Laplace. Par exemple : $f(t) = \tan(t)$ avec $t \in [0,\pi]$ ne respecte pas le première condition ; $f(t) = \dfrac{1}{t}$ qui ne respecte pas la deuxième condition d'existence ou encore ; $f(t) = e^{t^2}$ qui ne respecte pas la troisième condition.
- Pour qu'une fonction $F(s)$ corresponde à une T. Laplace, il faut que

$$\boxed{\lim_{|s|\to\infty} |F(s)| \to 0 \qquad \text{où } s = \sigma + i\,\gamma}$$

Exemple 12.1. *Sans la calculer explicitement, déterminez pour quelles valeurs de s la transformée de Laplace $F(s) = \mathscr{L}\left\{f(t)\right\}$ existe pour la fonction*

$$f(t) = e^{-10t}$$

Solution :

$$
\begin{aligned}
\left|F(s)\right| &= \left|\int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt\right| \\
&\leq \int_0^{\infty} \left|e^{-st}\right|\left|f(t)\right| dt = \int_0^{\infty} \left|e^{-(\sigma+i\gamma)t}\right|\left|f(t)\right| dt \\
&= \int_0^{\infty} e^{-\sigma t} e^{-10t}\, dt = \int_0^{\infty} e^{-(\sigma+10)t}\, dt = \lim_{A\to\infty} \int_0^{A} e^{-(\sigma+10)t}\, dt \\
&= \lim_{A\to\infty} \left[\frac{e^{-(\sigma+10)t}}{-(\sigma+10)}\right]_0^A = \frac{1}{-(\sigma+10)} \lim_{A\to\infty} \left[\frac{1}{e^{(\sigma+10)A}} - 1\right] \to 0 \quad \text{lorsque } \sigma + 10 > 0 \iff \sigma > -10
\end{aligned}
$$

Conclusion. Les valeurs de $s = \sigma + i\gamma$ *sont lorsque* $\sigma = Re(s) > -10$

Exemple 12.2. *Sans la calculer explicitement, déterminez pour quelles valeurs de s la transformée de Laplace* $F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}$ *existe pour la fonction*

$$f(t) = \frac{t^2}{t+1}$$

***Solution** :*
Soit $s = \sigma + i\gamma$.

$$
\begin{aligned}
\left|F(s)\right| &= \left|\int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt\right| \\
&\leq \int_0^{\infty} \left|e^{-st}\right|\left|f(t)\right| dt = \int_0^{\infty} \left|e^{-\sigma t}\right|\left|e^{-i\gamma t}\right|\left|f(t)\right| dt \\
&\leq \int_0^{\infty} e^{-\sigma t} \frac{t^2}{t+1}\, dt \leq \int_0^{\infty} e^{-\sigma t} \frac{t^2}{t+0}\, dt = \int_0^{\infty} e^{-\sigma t}\, t\, dt \\
&= \lim_{A\to\infty} \int_0^{A} e^{-\sigma t}\, t\, dt \\
& \quad \text{Et par une I.P.P, posons} \qquad g(t) = \begin{cases} u = t, & dv = e^{-\sigma t}\, dt \\ du = dt, & v = \dfrac{e^{-\sigma t}}{-\sigma} \end{cases} \\
&= \lim_{A\to\infty} \left[\frac{t\, e^{-\sigma t}}{-\sigma}\Big|_0^A - \int_0^{A} \frac{e^{-\sigma t}}{-\sigma}\, dt\right] \\
&= \frac{-1}{\sigma^2} = \frac{-1}{|s|^2 - \gamma^2} \text{ car } |s| = \sqrt{\sigma^2+\gamma^2} \iff \sigma^2 = |s|^2 - \gamma^2
\end{aligned}
$$

Ainsi

$$\lim_{|s|\to\infty} \left|F(s)\right| \leq \lim_{|s|\to\infty} \left|\frac{1}{|s|^2 - \gamma^2}\right| \to 0$$

Conclusion. Les valeurs de $s = \sigma + i\gamma$ *sont lorsque* $\sigma = Re(s) > 0$

Linéarité.
La transformée de Laplace est une transformation qui est linéaire. C'est-à-dire :

$$\mathscr{L}\left\{a\,f(t)+b\,g(t)\right\}=a\mathscr{L}\left\{f(t)\right\}+b\mathscr{L}\left\{g(t)\right\}$$

où a et b sont des constantes.

Transformée de Laplace

	$f(t) = \mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}$	$F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}$	
1	a	$\frac{a}{s}$	$s > 0$
2	t^n, où $n > 0$ est un entier	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$s > 0$
3	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	$s > a$
4	$\sin at$	$\frac{a}{s^2+a^2}$	$s > 0$
5	$\cos at$	$\frac{s}{s^2+a^2}$	$s > 0$
6	$\sinh at$	$\frac{a}{s^2-a^2}$	$s > \lvert a \rvert$
7	$\cosh at$	$\frac{s}{s^2-a^2}$	$s > \lvert a \rvert$
8	$e^{at}\cos bt$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$	$s > a$
9	$e^{at}\sin bt$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2}$	$s > a$
10	$e^{at}t^n$, où $n > 0$ est un entier	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$	$s > a$
11	$e^{ct}f(t)$	$F(s-c)$	
12	$f'(t)$	$sF(s) - f(0)$	
13	$f''(t)$	$s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$	
14	$f^{(n)}(t)$	$s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$	
15	$u(t-c) = u_c(t) = \begin{cases} 0, & t < c \\ 1, & t \geq c \end{cases}$	$\frac{1}{s}e^{-cs}$	$s > 0$
16	$f(t-c)\,u(t-c)$	$e^{-cs}F(s)$	
17	$\delta(t-c) = \delta_c(t)$	e^{-cs}	
18	$(f * g)(t) = \int_0^t f(t-r)g(r)\,dr = \int_0^t f(t)g(t-r)\,dr$	$F(s)\,G(s)$	

T. Laplace de $\delta(t - t_0)$

Soit $\delta(t - t_0)$ l'impulsion de Dirac. En se basant sur la propriété

$$\int_a^b f(t)\,\delta(t - t_0)\,dt = \begin{cases} f(t_0) & \text{si } \ t_0 \in [a, b] \\ 0 & \text{si } \ t_0 \notin [a, b] \end{cases}$$

alors

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\{\delta(t-t_0)\} &= \int_0^{\infty} e^{-s\,t}\delta(t-t_0)\,dt \qquad \text{et en supposant que } t_0 \in [0,\infty[\\
&= e^{-s\,t}\Big|_{t=t_0} \\
&= e^{-s\,t_0}
\end{aligned}$$

T. Laplace d'un produit de convolution

Soit les fonctions $f(t)$ et $g(t)$ définies pour $t \geq 0$ et nulles pour $t < 0$. Et soient

$$F(s) = \mathscr{L}\left\{f(t)\right\} \qquad \text{et} \qquad G(s) = \mathscr{L}\left\{g(t)\right\}$$

Alors la transformée de Laplace d'un produit de convolution est :

$$\boxed{\mathscr{L}\left\{(f * g)(t)\right\} = F(s)\;G(s)}$$

Preuve :
Soit

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\,g(t-\tau)\,d\tau$$

Alors

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\left\{(f * g)(t)\right\} &= \mathscr{L}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\,g(t-\tau)\,d\tau\right\} = \int_0^{\infty} e^{-st}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\,g(t-\tau)\,d\tau\right]dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\Big[\underbrace{\int_0^{\infty} e^{-st} g(t-\tau)\,dt}_{=\mathscr{L}\left\{g(t-\tau)\right\}}\Big]d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\,\mathscr{L}\left\{g(t-\tau)\right\}d\tau \qquad (1) \qquad \text{(par linéarité)}
\end{aligned}$$

Calcul de $\mathscr{L}\left\{g(t-\tau)\right\}$.

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\left\{g(t-\tau)\right\} &= \int_0^\infty e^{-s\,t}\, g(t-\tau)\, dt \qquad \text{et par le chang. var. } u = t-\tau \Rightarrow\; t = u+\tau \Rightarrow\; dt = du \\
&= \int_{u=-\tau}^\infty e^{-s(u+\tau)}\, g(u)\, du \\
&= e^{-s\tau} \int_{u=-\tau}^\infty e^{-s\,u}\, g(u)\, du \qquad \text{et comme } u \geq 0 \text{ pour la T.Laplace} \\
&= e^{-s\tau} \underbrace{\int_0^\infty e^{-s\,u}\, g(u)\, du}_{=\mathscr{L}\left\{g(t)\right\}} \qquad \text{(Ici u est une variable muette)} \\
\Rightarrow\; \mathscr{L}\left\{g(t-\tau)\right\} &= e^{-s\tau} \mathscr{L}\left\{g(t)\right\} \qquad (2)
\end{aligned}$$

En remplacant (2) dans (1) nous obtenons

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\left\{(f*g)(t)\right\} &= \int_{-\infty}^\infty f(\tau)\, e^{-s\tau} \mathscr{L}\left\{g(t)\right\} d\tau \\
&= \mathscr{L}\left\{g(t)\right\} \int_{-\infty}^\infty e^{-s\tau} f(\tau)\, d\tau = \mathscr{L}\left\{g(t)\right\} \underbrace{\int_0^\infty e^{-s\tau} f(\tau)\, d\tau}_{\mathscr{L}\left\{f(t)\right\}} \\
&= F(s)\, G(s)
\end{aligned}$$

Chapitre 13

Transformée de Laplace inverse

Pour trouver $f(t)$ la transformée de Laplace inverse de $F(s)$, que l'on note

$$f(t) = \mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}$$

on peut employer 2 méthodes :

- méthode de la décomposition en fractions partielles et d'une table de T. Laplace.
- méthode des résidus.

13.1 Méthode des fractions partielles

Si on peut décomposer sous la forme

$$F(s) = F_1(s) + F_2(s) + \cdots F_n(s)$$

alors

$$f(t) = \mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} = \mathscr{L}^{-1}\{F_1(s)\} + \mathscr{L}^{-1}\{F_2(s)\} + \cdots \mathscr{L}^{-1}\{F_n(s)\}$$

et chaque transformée inverse peut être calculée séparément à l'aide d'une table de transformée de Laplace.

Rappel sur les fractions partielles :

- $\dfrac{p(x)}{(x \pm a)(x \pm b)} = \dfrac{A}{x \pm a} + \dfrac{B}{x \pm b}$
- $\dfrac{p(x)}{(x \pm a)^n} = \dfrac{A_1}{x \pm a} + \dfrac{A_2}{(x \pm a)^2} + \cdots + \dfrac{A_n}{(x \pm a)^n}$
- $\dfrac{p(x)}{(ax^2 + bx + c)^n} = \dfrac{A_1 x + B_1}{ax^2 + bx + c} + \dfrac{A_2 x + B_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \cdots + \dfrac{A_n x + B_n}{(ax^2 + bx + c)^n}$
- $\dfrac{p(x)}{((x + a)^2 + b^2)^n} = \dfrac{A_1(x + a) + B_1}{((x + a)^2 + b^2)} + \dfrac{A_2(x + a) + B_2}{((x + a)^2 + b^2)^2} + \cdots + \dfrac{A_n(x + a) + B_n}{((x + a)^2 + b^2)^n}$

Exemple 13.1. *Trouvez* $f(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s(s-1)}\right\}$.

Solution

Par une décomposition en fractions partielles, nous avons

$$\frac{1}{s(s-1)} = \frac{-1}{s} + \frac{1}{s-1}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s-1)}\right\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{-1}{s} + \frac{1}{s-1}\right\} \\ &= \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{-1}{s}\right\} + \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} \qquad \text{et par une table de T. Laplace, nous avons} \\ f(t) &= -1 + e^t \end{aligned}$$

13.2 Méthode des résidus

Théorème 13.1. *Soit γ un nombre réel tel que $F(s)$ est définie pour $Re(s) \geq \gamma$. alors*

$$\boxed{f(t) = \mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} F(s)\, e^{s\,t}\, ds}$$

Preuve.
Avant-propos :

> Comme
> $$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-s\,t} f(t)\, dt$$
> alors en posant $s = \gamma + i\,\omega$, nous obtenons :
> $$F(\gamma + i\,\omega) = \int_0^{\infty} f(t)\, e^{-(\gamma + i\,\omega)\,t}\, dt$$

Posons

$$g(t) = \begin{cases} e^{-\gamma\,t} f(t), & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

En prenant la T. Fourier de $g(t)$ nous avons

$$\begin{aligned}
\widehat{g}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-i\,\omega\,t}\, dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\int_{-\infty}^{0} \underbrace{g(t)}_{=0} e^{-i\,\omega\,t}\, dt + \int_0^{\infty} \underbrace{g(t)}_{=e^{-\gamma\,t} f(t)} e^{-i\,\omega\,t}\, dt\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \underbrace{\int_0^{\infty} f(t)\, e^{-(\gamma + i\,\omega)\,t}\, dt}_{\text{Posons: } F(\gamma + i\,\omega)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} F(\gamma + i\,\omega)
\end{aligned}$$

Maintenant, en utilisant la T. Fourier inverse :

$$\begin{aligned}
g(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{g}(\omega)\; e^{i\,\omega\,t}\, d\omega \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} F(\gamma + i\omega)\; e^{i\,\omega\,t}\, d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\gamma + i\,\omega)\; e^{i\,\omega\,t}\, d\omega
\end{aligned}$$

En effectuant le changement de variable : $s = \gamma + i\,\omega, \Rightarrow i\,\omega = s - \gamma$ et $d\omega = \dfrac{ds}{i}$, nous obtenons

$$\begin{aligned} \underbrace{g(t)}_{= e^{-\gamma\, t} f(t)} &= \frac{1}{2\pi\, i}\int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} F(s)\; e^{(s-\gamma)\,t}\, ds \\ e^{-\gamma\, t} f(t) &= \frac{1}{2\pi\, i}\int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} F(s) e^{s\,t} e^{-\gamma\, t}\, ds \\ \Rightarrow f(t) &= \frac{1}{2\pi\, i}\int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} F(s)\, e^{s\,t}\, ds \end{aligned}$$

□

Théorème 13.2. *Soit $f(t)$ une fonction et $F(s)$ sa T. Laplace. Supposons que*

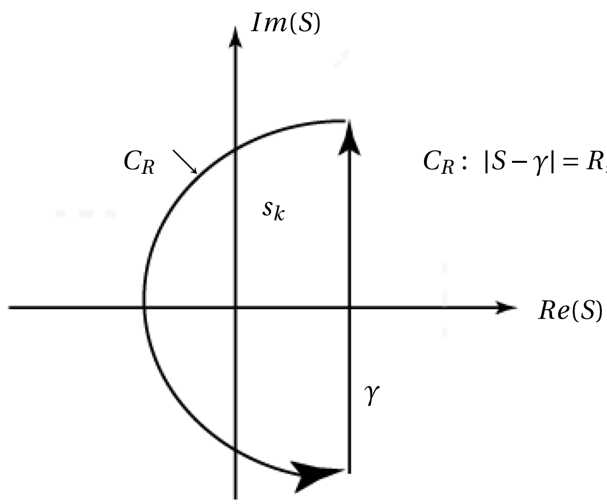
- *$F(s)$ est analytique sauf en un nombre fini de singularités $s_1, s_2, \cdots, s_N$.*
- $\lim_{|s| \to \infty} F(s) = 0$.
- *$F(s)$ est définie pour $Re(s) \geq \gamma$*

Alors

$$\boxed{f(t) = \frac{1}{2\pi\, i}\int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} F(s)\, e^{s\,t}\, ds = \sum_{k=1}^{N} Res(e^{s\,t} F(s); s = s_k)}$$

Preuve.

Soit $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que $F(s)$ est définie pour $Re(s) \geq \gamma$. De plus, supposons que γ a été choisi assez grand pour que toutes les singularités s_k de $F(s)$ soient " à gauche" de γ, i.e. $Re(s_k) < \gamma$ pour tout k. Ceci est possible car il y a un nombre fini de singularités.



$C_R: \ |S-\gamma| = R, \quad \frac{\pi}{2} \leq arg(s) \leq \frac{3\pi}{2}$

Soit $C = C_R \cup [\gamma - i\,R, \gamma + i\,R]$ où $R > 0$ est choisi assez grand pour que toutes les singularités soient à l'intérieur de la courbe fermée C.

Selon le théorème des résidus, nous avons

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C e^{s\,t} F(s)\,ds = \sum_{k=1}^{N} Rés(e^{s\,t} F(s); s = s_k)$$

Par conséquent

$$\frac{1}{2\pi i}\left[\underbrace{\int_{\gamma - i\,R}^{\gamma + i\,R} e^{s\,t} F(s)\,ds}_{①} + \underbrace{\int_{C_R} e^{s\,t} F(s)\,ds}_{②}\right] = \sum_{k=1}^{N} Res(e^{s\,t} F(s); s = s_k) \qquad (13.1)$$

Pour évaluer l'intégrale ② on effectue le changement de variable.
Posons

$$\begin{aligned} s &= \gamma + i\,z \qquad \Rightarrow z = -i(s-\gamma) \\ ds &= i\,dz \end{aligned}$$

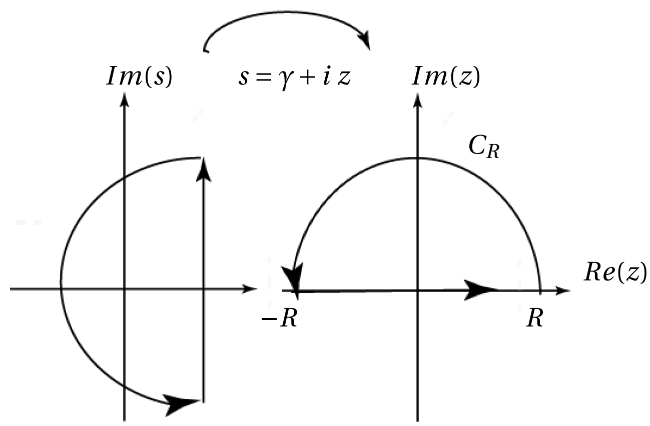
Le demi-cercle

$$C_R: \ |s-\gamma| = R, \ \text{avec} \ \frac{\pi}{2} \leq arg(S) \leq \frac{3\pi}{2}$$

devient

$$|z| = R, \ 0 \leq arg(z) \leq \pi.$$

Si $s \in C_R$ alors $|s-\gamma| = R$ et $Re(s) \leq \gamma$. Donc $|z| = |-i(s-\gamma) = |s-\gamma| = R$.



En se basant sur le théorème de Jordan qui dit que :

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} e^{s\,t} F(s)\, ds = \underbrace{\lim_{|z|=R}}_{0\leq arg(z)\leq\pi} \ i \int_{C_R} e^{(\gamma+i\,z)\,t}\, F(\gamma+i\,z)\, ds = 0, \text{pour } \ t > 0,$$

alors l'expression (13.1) devient

$$f(t) = \frac{1}{2\pi\, i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} F(s)\, e^{s\,t}\, ds = \sum_{k=1}^{N} Res(e^{s\,t} F(s); s = s_k)$$

Exemple 13.2. *Résoudre l'équation différentielle*

$$y'' + 2y' + y = e^{-t} \qquad \text{où} \ \ y(0) = -1, y'(0) = 1$$

Solution
En utilisant la T. de Laplace et en posant $\mathscr{L}\left\{y(t)\right\} = Y(s)$, nous avons :

$$\mathscr{L}\left\{y'' + 2y' + y\right\} = \mathscr{L}\left\{e^{-t}\right\}$$

$$\mathscr{L}\left\{y''\right\} + 2\mathscr{L}\left\{y'\right\} + \mathscr{L}\left\{y\right\} = \mathscr{L}\left\{e^{-t}\right\}$$

$$\left[s^2 Y(s) - s\underbrace{y(0)}_{=-1} - \underbrace{y'(0)}_{=1}\right] + 2\left[sY(s) - \underbrace{y(0)}_{=-1}\right] + Y(s) = \underbrace{\mathscr{L}(e^{-t})}_{=\frac{1}{s+1}}.$$

Ainsi

$$Y(s) = \frac{1}{(s+1)^3} - \frac{1}{s+1}$$

Donc

$$y(t) = \mathscr{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^3}\right\} - \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}$$

Trouvons les T. de Laplace inverses selon les 2 méthodes étudiées.

- *Méthode des décompositions en fractions partielles.*
  Comme $Y(s)$ est déjà décomposée en fractions partielles, il suffit donc d'utiliser la table des T. de Laplace.
  Ainsi

$$\begin{aligned} y(t) = \mathscr{L}^{-1}\{Y(s)\} &= \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^3}\right\} - \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} \\ y(t) &= \frac{t^2}{2}e^{-t} - e^{-t} \end{aligned}$$

- *Méthode des résidus.*
  Rappel : Pour un pôle z_0 d'ordre m, nous avons

$$R\acute{e}s(F(z), z = z_0) = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{(m-1)}}{dz^{(m-1)}}\left[(z-z_0)^m F(z)\right]$$

  Utilisons la formule

$$y(t) = \mathscr{L}^{-1}\{Y(s)\} = \sum_{k=1}^{N} R\acute{e}s(e^{st}Y(s); s = s_k)$$

- *Pour $Y_1(s) = \dfrac{1}{(s+1)^3}$,* $s_1 = -1$ *est un pôle d'ordre $m = 3$. Ainsi*

$$\begin{aligned} R\acute{e}s(e^{st}Y_1(s); s = s_1) &= \frac{1}{(3-1)!}\lim_{s\to -1}\frac{d^{(3-1)}}{ds^{(3-1)}}\left[(s+1)^3\frac{e^{st}}{(s+1)^3}\right] \\ &= \frac{1}{2}\lim_{s\to -1}\frac{d^2}{ds^2}\left[e^{st}\right] = \frac{t^2}{2}e^{-t} \end{aligned}$$

- *Pour* $Y_2(s) = \dfrac{1}{s+1}$, $\quad s_2 = -1$ *est un pôle d'ordre* $m = 1$. *Ainsi*

$$
\begin{aligned}
Rés(e^{st}Y_2(s); s = s_2) &= \frac{1}{(1-1)!}\lim_{s\to -1}\frac{d^{(1-1)}}{ds^{(1-1)}}\left[(s+1)\frac{e^{st}}{(s+1)}\right] \\
&= \frac{1}{0!}\lim_{s\to -1}\frac{d^0}{ds^0}\left[e^{st}\right] = e^{-t}
\end{aligned}
$$

Par conséquent

$$
\begin{aligned}
y(t) &= \mathscr{L}^{-1}\{Y(s)\} = \sum_{k=1}^{N} Res(e^{st}Y(s); s = s_k) \\
&= Rés(e^{st}Y_1(s); s = s_1) - Rés(e^{st}Y_2(s); s = s_2) \\
y(t) &= \frac{t^2}{2}e^{-t} - e^{-t}
\end{aligned}
$$

Exemple 13.3. *Calculez* $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2+1}\right\}$
Puisque les singularités sont $s_1 = i, s_2 = -i$ *qui sont des pôles d'ordre 1, alors*

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} = Rés(e^{st}\frac{1}{s^2+1}; s = i) + Rés(e^{st}\frac{1}{s^2+1}; s = -i) \\
&= \lim_{s\to i} e^{st}(s-i)\frac{1}{(s+i)(s-i)} + \lim_{s\to -i} e^{st}(s+i)\frac{1}{(s+i)(s-i)} \\
y(t) &= \frac{e^{it}}{2i} - \frac{e^{-it}}{2i} \\
&= \frac{e^{it}-e^{-it}}{2i} = \sin(t), \qquad t \geq 0.
\end{aligned}
$$