Chapitre 17

Transformée de Fourier

La transformée de Fourier est une généralisation de la théorie des séries de Fourier aux signaux non périodiques. Elle permet de mettre en oeuvre l'idée qu' à un signal *temporel* $f(t)$, on fait correspondre le signal *fréquentiel* $\hat{f}(\omega)$.

De plus, la transformée de Fourier sert à résoudre : des équations différentielles, des équations aux dérivées partielles ou des équations de convolution, qu'elle transforme en équations algébriques.

17.1 Transformée de Fourier

Définition 17.1. *La transformée de Fourier d'une fonction $f(t)$ sur l'intervalle $-\infty < t < \infty$ est une fonction notée $\mathscr{F}(f(t))$ ou $\hat{f}(\omega)$ et définie par*

$$\boxed{\hat{f}(\omega) = \mathscr{F}(f(t)) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t)\, dt, \qquad \omega \in \mathbb{R}}$$

Note :

- La constante $\sqrt{2\pi}$ peut différer selon certains ouvrages.
- Dans le domaine électrique :

$$\begin{aligned} \omega &= 2\pi f && \text{où } f \text{ est la fréquence (Hz) et } \omega \text{ (rad/sec) la pulsation.} \\ & && \text{(f est parfois notée } \nu\text{)} \\ &= 2\pi \frac{1}{T} && \text{où } T \text{ est la période} \end{aligned}$$

- La courbe $y = |\hat{f}(\omega)|$ est appelée le spectre de f et on démontrera que $\lim\limits_{|\omega|\to\infty} |\hat{f}(\omega)| = 0$.

Autres définitions de la Transformée de Fourier

#	Définition	$\hat{f} = \mathscr{F}(f)$	$f = \mathscr{F}^{-1}(\hat{f})$
1	En fréquence : ν	$\hat{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi\nu t} f(t)\,dt$	$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i2\pi\nu t} \hat{f}(\nu)\,d\nu$
2	En pulsation : ω	$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t)\,dt$	$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \hat{f}(\omega)\,d\omega$
3	Symétrique en pulsation : ω	$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t)\,dt$	$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \hat{f}(\omega)\,d\omega$

Conditions d'existence :
Pour qu'une fonction $f(t)$ possède une transformée de Fourier, il est suffisant (mais non nécessaire) que les conditions suivantes soient respectées :

$C.1.$ la fonction $f(t)$ soit bornée sur l'intervalle $]-\infty,\infty[$;
$C.2.$ la fonction $f(t)$ soit absolument intégrable sur l'intervalle $]-\infty,\infty[$. C'est-à-dire

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\,dt < \infty. \qquad (\mathscr{L}^1(\mathbb{R}) : \text{espace de Lebesgue})$$

$C.3.$ la fonction $f(t)$ possède un nombre fini de discontinuités dans le cas où f est discontinue.

Exemple 17.1. *La fonction* $f(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$ *définie* $\forall\, t \in]-\infty,\infty[$ *est :*

- *bornée car*

$$|f(t)| = \left|\frac{1}{1+t^2}\right| = \frac{1}{1+t^2} \leq 1;$$

- *Absolument intégrable car :*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+t^2}\, dt = 2\int_{0}^{\infty} \frac{1}{1+t^2}\, dt = 2\lim_{m\to\infty} \Big[\arctan(t)\Big]_0^m = \pi < \infty;$$

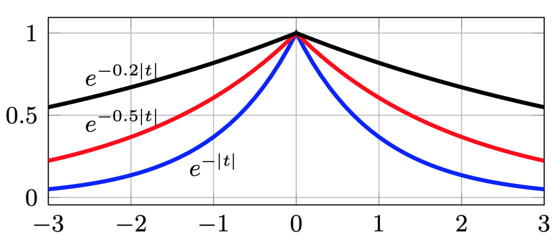
- *continue car f est définie* $\forall\, t \in]-\infty,\infty[$.

Conclusion : la T.F. de f existe.

Remarque : Pour la fonction continue $f(t) = A$, (une constante), définie $\forall\, t \in]-\infty,\infty[$, la condition $C2$ n'est pas vérifiée car

$$\int_{-\infty}^{\infty} A\, dt = \infty \qquad \text{(Donc l'intégrale diverge)}$$

Par contre, on peut trouver sa transformée de Fourier en utilisant l'approximation suivante : $f(t) = Ae^{-\epsilon\,|\,t|}$ car en prenant $\epsilon \to 0$ alors $f(t) \to A$.



$$
\begin{aligned}
\hat{f}(\omega)=\mathscr{F}(f(t)) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}\, Ae^{-\epsilon|t|}\, dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\int_{-\infty}^{0} e^{-i\omega t}\, Ae^{\epsilon t}\, dt+\int_{0}^{\infty} e^{-i\omega t}\, Ae^{-\epsilon t}\, dt\right] \\
&= \frac{A}{\sqrt{2\pi}}\left[\int_{-\infty}^{0} e^{-i\omega t}\, e^{\epsilon t}\, dt+\int_{0}^{\infty} e^{-i\omega t}\, e^{-\epsilon t}\, dt\right] \\
&= \frac{A}{\sqrt{2\pi}}\left[\int_{-\infty}^{0} e^{(-i\omega+\epsilon)t}\, dt+\int_{0}^{\infty} e^{(-i\omega-\epsilon)t}\, dt\right] \\
&= \frac{A}{\sqrt{2\pi}}\left[\lim_{m\to-\infty}\frac{e^{(-i\omega+\epsilon)t}}{(-i\omega+\epsilon)}\bigg|_{t=m}^{0}+\lim_{m\to\infty}\frac{e^{(-i\omega-\epsilon)t}}{(-i\omega-\epsilon)}\bigg|_{0}^{m}\right] \\
&= \frac{A}{\sqrt{2\pi}}\left[\lim_{m\to-\infty}\left(\frac{1}{(-i\omega+\epsilon)}-\frac{e^{(-i\omega+\epsilon)m}}{(-i\omega+\epsilon)}\right)+\lim_{m\to\infty}\left(\frac{e^{(-i\omega-\epsilon)m}}{(-i\omega-\epsilon)}-\frac{1}{(-i\omega-\epsilon)}\right)\right] \\
&= \frac{A}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{1}{(-i\omega+\epsilon)}-\frac{1}{(-i\omega-\epsilon)}\right] \\
&= \frac{A}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{1}{(-i\omega+\epsilon)}+\frac{1}{(i\omega+\epsilon)}\right] \\
&= \frac{A}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{(i\omega+\epsilon)+(-i\omega+\epsilon)}{\epsilon^2+\omega^2}\right]=\frac{A}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{2\epsilon}{\epsilon^2+\omega^2}\right] \\
&= \frac{A}{\sqrt{2\pi}}\delta(\omega)
\end{aligned}
$$

car lorsque $\epsilon \to 0$, alors $\hat{f}(\omega)$ devient une impulsion de Dirac. C'est-à-dire

$$\lim_{\epsilon\to 0}\left[\frac{2\epsilon}{\epsilon^2+\omega^2}\right]=\delta(\omega)$$

$$\mathscr{F}(A)=\frac{A}{\sqrt{2\pi}}\ \delta(\omega)$$

Propriétés de la transformée de Fourier.

P.1 Linéarité : $\mathscr{F}(a\,f(t)+b\,g(t)) = a\,\mathscr{F}(f(t))+b\,\mathscr{F}(g(t))$

Preuve

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}(a\,f(t)+b\,g(t)) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left[a\,f(t)+b\,g(t)\right]e^{-i\,\omega\,t}\,dt\\
&= a\,\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{-i\,\omega\,t}\,dt}_{\mathscr{F}(f(t))}+b\,\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\,e^{-i\,\omega\,t}\,dt}_{\mathscr{F}(g(t))}\\
&= a\,\mathscr{F}(f(t))+b\,\mathscr{F}(g(t))
\end{aligned}$$

P.2 Changement d'échelle : $\mathscr{F}(\,f(a\,t)) = \dfrac{1}{|a|}\hat{f}(\dfrac{\omega}{a})$, pour $a \neq 0$.

Preuve

Considérons $a \neq 0$. Ainsi

$\mathscr{F}(f(at)) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(at)\,e^{-i\,\omega\,t}\,dt$. En posant $at = y \Rightarrow t = \dfrac{y}{a} \Rightarrow dt = \dfrac{dy}{a}$

nous avons :

- pour $a>0$, nous avons $a = |a|$, donc

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}(f(a\,t)) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(at)\,e^{-i\,\omega\,t}\,dt,\\
&= \frac{1}{|a|}\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\,e^{-i\,(\frac{\omega}{a})\,y}\,dy}_{\hat{f}(\frac{\omega}{a})}
\end{aligned}$$

- pour $a<0$, nous avons $-a=|a|$, donc

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}(f(a\,t)) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(at)\,e^{-i\,\omega\,t}\,dt,\\
&= \frac{1}{a}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{y=+\infty}^{-\infty} f(y)\,e^{-i\,\omega\,\frac{y}{a}}\,dy\\
&= -\frac{1}{a}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{y=-\infty}^{\infty} f(y)\,e^{-i\,\omega\,\frac{y}{a}}\,dy\\
&= \frac{1}{|a|}\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\,e^{-i\,(\frac{\omega}{a})y}\,dy}_{\hat{f}(\frac{\omega}{a})}
\end{aligned}$$

En résumé, nous avons

$$\mathscr{F}(\,f(a\,t)) = \frac{1}{|a|}\hat{f}(\frac{\omega}{a}),\ \text{pour } a\neq 0.$$

Ainsi lorsque l'on contracte un signal dans le domaine temporel, on le dilate dans le domaine fréquentiel et inversement.

P.3 Transposition : $\mathscr{F}(f(-t)) = \hat{f}(-\omega)$

Preuve

Par la propriété **P.2** avec $a=-1$, nous obtenons

$$\mathscr{F}(f(-t)) = \hat{f}(-\omega)$$

P.4 Translation : $\mathscr{F}(\,f(t-t_0)) = e^{-i\,\omega\,t_0}\mathscr{F}(f(t))$

Preuve

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}(f(t-t_0)) = &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t-t_0)\,e^{-i\,\omega\,t}\,dt,\ \text{posons}\ \ u=t-t_0 \Rightarrow t=u+t_0 \Rightarrow dt=du\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\,e^{-i\,\omega\,(u+t_0)}\,du\\
&= e^{-i\,\omega\,t_0}\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\,e^{-i\,\omega\,u}\,du}_{\mathscr{F}(f(u))} \qquad \text{(ici } u \text{ est une variable muette)}
\end{aligned}$$

D'où

$$\mathscr{F}(\,f(t-t_0)) = e^{-i\,\omega\,t_0}\mathscr{F}(f(t))$$

P.5 Conjugaison Soit $f^*(t)$ la conjuguée de $f(t)$ alors

$$\mathscr{F}(f^*(t)) = \left(\hat{f}(-\omega)\right)^*$$

Preuve

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}(f^*(t)) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f^*(t)\, e^{-i\omega t}\, dt, \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{+i\omega t}\, dt\right)^* = \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i(-\omega)t}\, dt\right)^*}_{=\hat{f}(-\omega)} = \left(\hat{f}(-\omega)\right)^*,
\end{aligned}$$

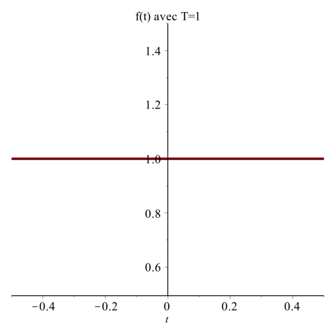
Exemple 17.2. *Trouvez la T.Fourier de la fonction*

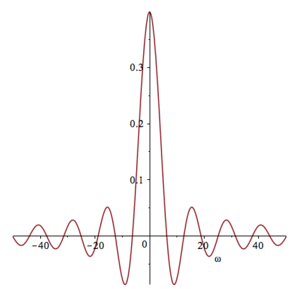
$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad |t| \le a, \quad a \in \mathbb{R}^+ \\ 0 & \text{si} \quad |t| > a, \end{cases}$$

Solution *En appliquant la définition de la T.F., nous avons*

$$\begin{aligned}
\hat{f}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-a}^{a} 1\cdot e^{-i\omega t}\, dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-a}^{a} 1\cdot \left[\cos(\omega t) - i\underbrace{\sin(\omega t)}_{impaire}\right] dt \xrightarrow{} 0 \\
&= \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{a} \cos(\omega t)\, dt \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\sin(a\omega)}{\omega}
\end{aligned}$$

Résumé : faire le graphique de $f(t)$ et $\hat{f}(\omega)$.


f(t) avec T=1
1.4
1.2
1.0
0.8
0.6
−0.4
−0.2
0
0.2
0.4
t


0.3
0.2
0.1
−40
−20
0
20
40
ω

17.2 Transformée de Fourier sinus et cosinus

En substituant $\theta = -\omega\, t$, dans la formule d'Euler

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\, \sin(\theta),$$

nous obtenons :

$$e^{-i\omega t} = \cos(\omega\, t) - i\, \sin(\omega\, t).$$

Ainsi

1. Si $f(t)$ est une fonction paire : $f(t) = f(-t)$
   alors

$$\begin{aligned}
\hat{f}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, [\cos(\omega\, t) - i\, \sin(\omega\, t)]\, dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\underbrace{f(t)}_{paire}\, \underbrace{\cos(\omega\, t)}_{paire}}_{paire}\, dt - i\, \cancelto{0}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\underbrace{f(t)}_{paire}\, \underbrace{\sin(\omega\, t)}_{impaire}}_{impaire}\, dt} \\
&= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} f(t)\, \cos(\omega\, t)\, dt \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{\infty} f(t)\, \cos(\omega\, t)\, dt
\end{aligned}$$

Définition 17.2. *La transformée de Fourier cosinus d'une fonction paire $f(t)$ sur l'intervalle $-\infty < t < \infty$ est une fonction notée $\hat{f}_c(\omega)$ et définie par*

$$\boxed{\hat{f}_c(\omega) \overset{\text{déf}}{=} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{\infty} f(t)\, \cos(\omega\, t)\, dt}$$

2. Si $f(t)$ est une fonction impaire : $f(-t) = -f(t)$

alors

$$
\begin{aligned}
\hat{f}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\,\omega\, t}\, dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, [\cos(\omega\, t) - i\, \sin(\omega\, t)]\, dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\underbrace{f(t)}_{impaire}\;\underbrace{\cos(\omega\, t)}_{paire}}_{impaire} dt \to 0 \; - i\, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\underbrace{f(t)}_{impaire}\;\underbrace{\sin(\omega\, t)}_{impaire}}_{paire} dt \\
&= -i\, \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} f(t)\, \sin(\omega\, t)\, dt \\
&= -i\, \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{\infty} f(t)\, \sin(\omega\, t)\, dt
\end{aligned}
$$

Définition 17.3. *La transformée de Fourier sinus d'une fonction impaire $f(t)$ sur l'intervalle $-\infty < t < \infty$ est une fonction notée $\hat{f}_s(\omega)$ et qui est définie par*

$$
\boxed{\hat{f}_s(\omega) \overset{\text{déf}}{=} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{\infty} f(t)\, \sin(\omega\, t)\, dt \qquad \text{(sans le terme -}i\text{)}}
$$

17.3 Transformée de Fourier inverse

Schématiquement, nous avons :

$$\begin{tikzcd} f(t) \arrow[rr, bend left, "\mathscr{F}\left(f(t)\right)"] & & \hat{f}(\omega) \arrow[ll, bend left, "\mathscr{F}^{-1}\left(\hat{f}(\omega)\right)"] \end{tikzcd}$$

Théorème 17.1. *(Théorème de Fourier inverse)*

Supposons que $\int_{-\infty}^{\infty} \left| f(t) \right| dt$ *converge et que* $f(t)$ *et* $f'(t)$ *soient continues par morceaux dans l'intervalle* $]-\infty,\infty[$. *Alors la transformée inverse de* $f(t)$*, notée* $\mathscr{F}^{-1}(\hat{f}(\omega))$ *est définie par :*

$$\boxed{\mathscr{F}^{-1}(\hat{f}(\omega)) \overset{\text{déf}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)\, e^{i\,\omega\, t}\, d\omega}$$

Remarque :

$$\mathscr{F}^{-1}(\hat{f}(\omega)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)\, e^{i\,\omega\, t}\, d\omega = \begin{cases} f(t), & \text{si } t \text{ est un point de continuité} \\ \dfrac{f(t^+) + f(t^-)}{2}, & \text{si } t \text{ est un point de discontinuité} \end{cases}$$

Preuve (Idée seulement).

Notons tout d'abord que si g est intégrale au sens de Riemann sur l'intervalle $]-\infty,\infty[$, alors l'aire sous la courbe est :

$$\lim_{L\to\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\pi}{L}\, g(\frac{n\,\pi}{L}) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega)\, d\omega$$

Mettre la figure ici

Considérons maintenant $f(t)$ comme étant périodique, de période $p = 2L$, avec $L \to \infty$. Nous avons alors

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\, e^{i\frac{n\pi t}{L}}, \qquad \text{où} \qquad c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(u)\, e^{-i\frac{n\pi u}{L}}\, du$$

En remplacant c_n dans $f(t)$, nous avons :

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(u)\, e^{-i\frac{n\pi u}{L}}\, du\right] e^{i\frac{n\pi t}{L}}$$

En multipliant la dernière expression en haut et en bas par π , nous avons :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\pi}{L}\underbrace{\int_{-L}^{L} f(u)\, e^{i\frac{n\pi(t-u)}{L}}\, du}_{=g(\omega)}$$

Donc en prenant la limite de chaque coté de cette dernière expression, nous avons

$$\begin{aligned}
f(t) &= \frac{1}{2\pi}\lim_{L\to\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\pi}{L}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\, e^{i\frac{n\pi(t-u)}{L}}\, du \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\, e^{i\frac{n\pi(t-u)}{L}}\, du \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\, e^{-i\frac{n\pi u}{L}}\, dt}_{=\sqrt{2\pi}\hat{f}(\omega)}\, e^{i\frac{n\pi t}{L}}\, du \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega
\end{aligned}$$

17.4 Transformée de Fourier et intégrales particulières.

Exemple 17.3. *Soit la fonction*

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad |t| \le a, \quad a \in \mathbb{R}^+ \\ 0 & \text{si} \quad |t| > a, \end{cases}$$

dont la transformée de Fourier est :

$$\hat{f}(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\sin(a\,\omega)}{\omega}$$

Appliquez le théorème de Fourier inverse pour trouver la valeur de quelques intégrales.

Solution.
Par le théorème de Fourier inverse, nous avons :

$$\begin{aligned}
f(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\sin(a\omega)}{\omega}e^{i\,\omega\,t}d\omega \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\underbrace{\frac{\sin(a\,\omega)}{\omega}}_{paire}\Big[\underbrace{\cos(\omega\,t)}_{paire}+i\,\underbrace{\sin(\omega\,t)}_{impaire}\Big]\,d\omega \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(a\,\omega)\,\cos(\omega\,t)}{\omega}\,d\omega
\end{aligned}$$

D'où

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(a\,\omega)\,\cos(\omega\,t)}{\omega}\,d\omega = \pi\cdot f(t)$$

Analysons 2 situations : selon que t est un point de continuité ou non.

- *Si t est un point de continuité alors*

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(a\,\omega)\,\cos(\omega\,t)}{\omega}\,d\omega = \pi\cdot f(t) = \begin{cases}\pi & \text{si} \quad |t|\le a, \quad a\in\mathbb{R}^+\\ 0 & \text{si} \quad |t|>a,\end{cases}$$

Cas particulier :
Si $a=1$ et $t=0$, nous obtenons l'intégrale de Dirichlet :

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(\omega)}{\omega}d\omega = \pi$$

- *Pour $t=\pm a$ qui sont des points de discontinuités, nous avons*

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(a\,\omega)\,\cos(a\,\omega)}{\omega}d\omega = \pi\left[\frac{\overbrace{f(a^+)}^{=0}+\overbrace{f(a^-)}^{=1}}{2}\right] = \frac{\pi}{2}$$

Exemple 17.4. *Calculez la transformée de Fourier de $f(t)=e^{\frac{-t^2}{2}}$*
Note : l'intégrale de Gauss est :

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\left(t+i\frac{\omega}{\sqrt{2}}\right)^2}\,dt = \sqrt{\pi}$$

Solution

$$
\begin{aligned}
\hat{f}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-t^2}{2}}\, e^{-i\,\omega\, t}\, dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\left(-\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2 - i\,\omega\, t\right)}\, dt \\
\text{Posons} \qquad t^* &= \frac{t}{\sqrt{2}} \ \text{ alors } \quad dt = \sqrt{2}\ dt^* \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(t^*)^2 - i\,\sqrt{2}\,\omega\, t^*}\ dt^* \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\, e^{-\frac{\omega^2}{2}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(t^* + i\frac{\omega}{\sqrt{2}})^2}\, dt^*}_{=\sqrt{\pi}} \\
&= e^{-\frac{\omega^2}{2}}
\end{aligned}
$$

Propriétés

P.1 Transformée d'une dérivée.
Si $\lim_{t\to\pm\infty} f^{(k)}(t) = 0$ avec $0 \le k \le n$, alors

$$\boxed{\mathscr{F}(f^{(n)}(t)) = (i\,\omega)^n\,\hat{f}(\omega)}$$

Preuve (pour $n = 1$). Pour $n > 1$, il faut faire une démonstration par récurrence (induction mathématique).

$$\mathscr{F}(f'(t)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f'(t)\,e^{-i\,\omega\,t}\,dt}_{\text{En intégrant par parties}}$$

Ainsi, posons

$$\begin{cases} u = e^{-i\,\omega\,t}, & dv = f'(t)\,dt \\ du = -i\,\omega\,e^{-i\,\omega\,t}\,dt, & v = f(t) \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}(f'(t)) &= \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Big[f(t)\,e^{-i\,\omega\,t}\Big]_{t=-\infty}^{\infty}}_{=0 \text{ car } f(t) \text{ est bornée}} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(-i\,\omega)\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{-i\,\omega\,t}dt}_{=\sqrt{2\pi}\,\hat{f}(\omega)} \\
&= i\,\omega\,\hat{f}(\omega)
\end{aligned}$$

□

En utilisant le principe d'induction (récurrence), nous pouvons démontrer pour le cas général (pour $n > 1$) :

$$\mathscr{F}(f^{(n)}(t)) = (i\omega)^n\,\hat{f}(\omega)$$

P.2 Dérivée d'une transformée de Fourier

$$\boxed{i^n\,\frac{d^n}{d\omega^n}(\hat{f}(\omega)) = \mathscr{F}(t^n\,f(t))}$$

Preuve.

$$\begin{aligned}
\hat{f}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\,\omega\, t} dt \\
\frac{d^n}{d\omega^n}\left(\hat{f}(\omega)\right) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, \frac{d^n}{d\omega^n}\left(e^{-i\,\omega\, t}\right) dt \\
&= (-i)^n \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t^n\, f(t)\, e^{-i\,\omega\, t} dt}_{\mathscr{F}(t^n f(t))} \\
i^n \frac{d^n}{d\omega^n}\left(\hat{f}(\omega)\right) &= \mathscr{F}(t^n\, f(t)) \qquad \text{Note : } \frac{1}{(-i)^n} = \left(\frac{1}{-i}\right)^n = \left(\frac{i}{-i \cdot i}\right)^n = i^n
\end{aligned}$$

$\square$

P.3 Symétrie

Si $\mathscr{F}(f(t)) = \hat{f}(\omega)$ alors (en substituant ω par t) nous avons

$$\mathscr{F}(\hat{f}(t)) = f(-\omega)$$

Preuve.

$$\begin{aligned}
f(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)\, e^{+i\,\omega\,t} d\omega \\
f(-t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)\, e^{-i\,\omega\,t} d\omega \\
\text{et en échangeant} & \quad \omega \text{ par } t \text{ et } t \text{ par } \omega, \text{nous obtenons} \\
f(-\omega) &= \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(t)\, e^{-i\,\omega\,t} dt}_{\|} \\
&= \mathscr{F}(\hat{f}(t))
\end{aligned}$$

□

Exemple 17.5. *Soit*

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad -1 \le t < 1, \\ 0 & \text{si} \quad \text{sinon,} \end{cases}$$

dont la T. Fourier est :

$$\mathscr{F}(f(t)) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\sin(\omega)}{\omega}.$$

Trouvez la T. Fourier de $g(t) = \dfrac{\sin(t)}{t}$.

Solution.

$$\mathscr{F}(f(t)) = \underbrace{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{\sin(\omega)}{\omega}}_{=\hat{f}(\omega)}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}(\hat{f}(\omega)) &= \mathscr{F}\Big(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\sin(\omega)}{\omega}\Big) \ \omega \text{ par } t \qquad \text{et en remplacant } \omega \text{ par } t \\
\Rightarrow \ \mathscr{F}(\hat{f}(t)) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \mathscr{F}\Big(\frac{\sin(t)}{t}\Big) \overset{P.3.}{=} f(-\omega)
\end{aligned}$$

Donc

$$\mathscr{F}\left(\frac{\sin(t)}{t}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, f(-\omega) \tag{17.4.1}$$

Calculons $f(-\omega)$.

$$f(-\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad -1 \leq \omega < 1, \\ 0 & \text{si} \quad \text{sinon,} \end{cases}$$

Ainsi en utilisant la fonction de Heaviside $u(\omega - \omega_0)$, nous avons :

$$f(-\omega) = u(\omega + 1) - u(\omega - 1)$$

Par conséquent l'expression (17.4.1) devient

$$\mathscr{F}(g(t)) = \mathscr{F}\left(\frac{\sin(t)}{t}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(u(\omega + 1) - u(\omega - 1)\right)$$

17.5 Identité de Parseval pour la transformée de Fourier

L'identité de Parseval permet de faire le lien entre l'énergie d'un signal en fonction du temps et l'énergie en fonction de la fréquence. Puisque la fréquence et le temps sont deux domaines qui permettent de décrire complètement un signal, il faut que l'énergie totale soit la même dans les deux domaines. Cette identité est :

$$\boxed{E = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2\, d\omega}$$

Preuve.

$$\begin{aligned}
f(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\omega=-\infty}^{\infty}\hat f(\omega)\, e^{+i\,\omega\, t}d\omega\\
(f(t))^* &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\omega=-\infty}^{\infty}(\hat f(\omega))^*\, e^{-i\,\omega\, t}d\omega\\
f(t)(f(t))^* &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\omega=-\infty}^{\infty}f(t)\,(\hat f(\omega))^*\, e^{-i\,\omega\, t}d\omega\\
\int_{t=-\infty}^{\infty}\underbrace{f(t)(f(t))^*}_{=|f(t)|^2}dt &= \int_{t=-\infty}^{\infty}\Big[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\omega=-\infty}^{\infty}f(t)\,(\hat f(\omega))^*\, e^{-i\,\omega\, t}d\omega\Big]dt\\
&= \int_{\omega=-\infty}^{\infty}(\hat f(\omega))^*\cdot\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{t=-\infty}^{\infty}f(t)\, e^{-i\,\omega\, t}dt}_{=\hat f(\omega)}d\omega \quad \text{(après permutation des bornes)}\\
&= \int_{\omega=-\infty}^{\infty}\underbrace{(\hat f(\omega))^*\,\hat f(\omega)}_{=|\hat f(\omega)|^2}\,d\omega\\
\int_{t=-\infty}^{\infty}|f(t)|^2\,dt &= \int_{\omega=-\infty}^{\infty}|\hat f(\omega)|^2\,d\omega
\end{aligned}$$

□

D'un point de vue mathématique, l'identité de Parseval permet de trouver la valeur numérique d'une intégrale compliquée. Ainsi

Exemple 17.6. *Soit la fonction*

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad |t| < a, \quad a\in\mathbb{R}^+ \\ 0 & \text{si} \quad |t| > a, \end{cases}$$

dont la transformée de Fourier $\hat f(\omega)$ *est*

$$\hat f(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{\sin(a\omega)}{\omega}$$

En utilisant l'identité de Parseval nous avons :

$$\begin{aligned}
\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2\,dt}_{=2a} &= \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}|\hat f(\omega)|^2\,d\omega}\\
2a &= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{2}{\pi}\Big(\frac{\sin(a\omega)}{\omega}\Big)^2 d\omega
\end{aligned}$$

Par conséquent, avec $a = 1$, nous obtenons

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin(\omega)}{\omega}\right)^2 d\omega = \pi$$

17.6 Transformée de Fourier d'un produit de convolution

Théorème 17.2. *(Théorème de convolution)*
Considérons deux fonctions $f(t)$ et $g(t)$ dont le produit de convolution $(f * g)(t)$ existe. Alors

$$\boxed{\mathscr{F}(f * g) \; = \; \sqrt{2\pi} \quad \mathscr{F}(f) \;\; \mathscr{F}(g)}$$

Preuve.

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}(f * g) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{t=-\infty}^{\infty} (f * g)(t)\, e^{-i\omega t}\, dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{t=-\infty}^{\infty} \left[\int_{\tau=-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t-\tau)\, d\tau\right] e^{-i\omega t}\, dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\tau=-\infty}^{\infty} \int_{t=-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t-\tau)\, d\tau\, e^{-i\omega t}\, dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\tau=-\infty}^{\infty} f(\tau)\, d\tau \int_{t=-\infty}^{\infty} g(t-\tau)\, e^{-i\omega t}\, dt \\
& \quad \text{et en posant le changement de variable } \; y = t - \tau \to dt = dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\tau=-\infty}^{\infty} f(\tau)\, d\tau \int_{y=-\infty}^{\infty} g(y)\, e^{-i\omega(y+\tau)}\, dy \\
&= \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\tau=-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-i\omega\tau}\, d\tau\right] \left[\int_{y=-\infty}^{\infty} g(y)\, e^{-i\omega y}\, dy\right] \\
&= \left[\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\tau=-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-i\omega\tau}\, d\tau}_{\mathscr{F}(f)}\right] \left[\sqrt{2\pi}\, \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{y=-\infty}^{\infty} g(y)\, e^{-i\omega y}\, dy}_{\mathscr{F}(g)}\right] \\
\mathscr{F}(f * g) &= \sqrt{2\pi}\; \mathscr{F}(f)\; \mathscr{F}(g)
\end{aligned}$$

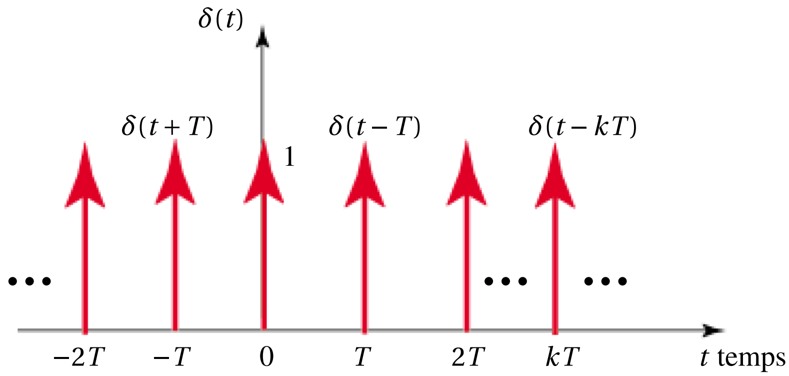
□

17.7 Peigne de Dirac

Concrètement, le **peigne de Dirac** (ou train d'impulsions) permet d'échantionner un signal analogique afin de le convertir en un signal numérique.
Mathématiquement, le peigne de Dirac est une distribution, notée $f_T(t)$, qui est définie par

$$f_T(t) \overset{\text{déf}}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT)$$

où T est un nombre positif. Ce peigne est représenté ci-dessous.



Notons que :

$$f_T(t) = \begin{cases} +\infty & \text{si } t = kT \text{ où } k \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

Cette distribution périodique est particulièrement utile dans les problèmes d'échantillonnage, lors du remplacement d'une fonction continue par une suite de valeurs de la fonction séparées par un pas de temps T (voir Théorème d'échantillonnage de Nyquist-Shannon).

Une propriété importante du peigne de Dirac stipule que si nous lui appliquons la transformée de Fourier alors nous obtenons un autre peigne de Dirac. Précisément

$$\boxed{\mathscr{F}(f_T(t)) = \frac{\sqrt{2\pi}}{T} f_{\frac{2\pi}{T}}(w) \qquad \text{où} \quad \mathscr{F}(f_T(t)) \text{ signifie } \hat{f}_T(\omega)}$$

Preuve.
La preuve se fait en calculant la transformée et la série de Fourier et en concluant.

- Calcul de la Transformée de Fourier du peigne de Dirac.
  En appliquant la transformée de Fourier d'une fonction $f(t)$ qui est :

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

nous avons :

$$\begin{aligned}
\hat{f}_T(\omega) = \mathscr{F}(f_T(t)) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT) e^{-i\omega t} dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-kT) e^{-i\omega t} dt
\end{aligned}$$

et en utilisant la propriété $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0) f(t)\, dt = f(t_0)$, nous obtenons

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-i\omega k T}$$

En posant $k^* = -k$

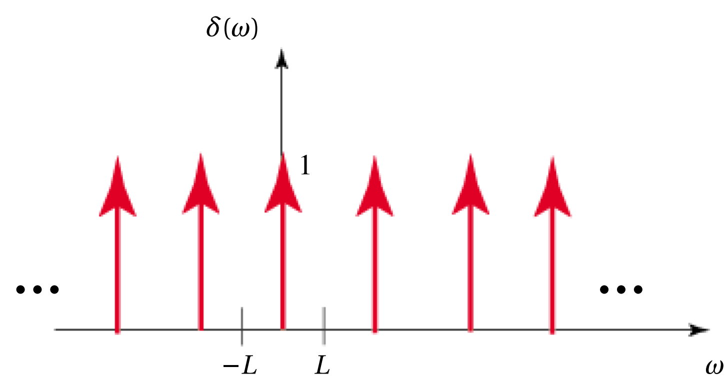
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k^*=\infty}^{-\infty} e^{+i\omega k^* T} \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k^*=-\infty}^{\infty} e^{+i\omega k^* T}$$

Comme k^* est un indice muet alors

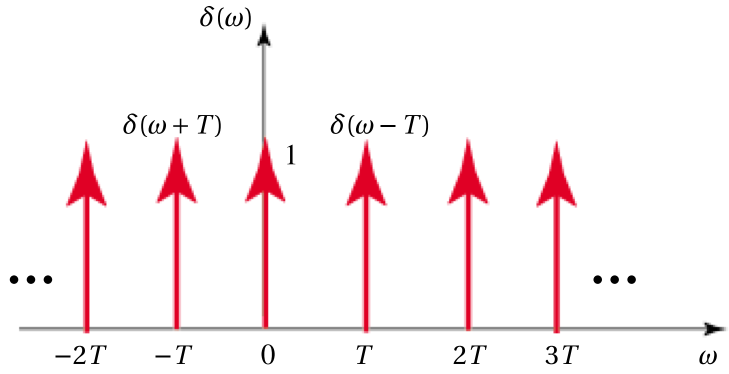
$$\hat{f}_T(\omega) = \mathscr{F}(f_T(t)) = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{i\omega k T}}_{SF(t) \text{ forme exponentielle}}$$

- Calcul de la série de Fourier (forme exponentielle) du peigne de Dirac.
  Considérons la fonction

$$f_{\underbrace{2L}_{=T}}(\omega) = \delta(\omega), \qquad -L < \omega < L, \text{ périodique, de période } 2L$$



Notons que le peigne de Dirac $f_T(\omega)$ est effectivement obtenu en prenant $L = \frac{T}{2}$.



Le développement en série de Fourier (forme exponentielle) de $f_{2L}(\omega)$ est

$$f_{2L}(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \, e^{i\,\dfrac{k\pi\,\omega}{L}} \quad \text{où} \;\; c_k = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} \delta(w) e^{-i\,\dfrac{k\pi\,\omega}{L}} \, d\omega = \frac{1}{2L}$$

C'est-à-dire

$$f_{2L}(\omega) = \frac{1}{2L}\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{i\,\frac{k\pi\omega}{L}}$$

- En posant $L = \dfrac{\pi}{T}$, nous obtenons

$$\begin{aligned} f_{\frac{2\pi}{T}}(\omega) &= \frac{T}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{i\,kT\,\omega} \\ &= \underbrace{\frac{T}{2\pi}\sqrt{2\pi}}_{\dfrac{T}{\sqrt{2\pi}}}\,\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{i\,kT\,\omega}}_{\hat{f}_T(\omega)} \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\hat{f}_T(\omega) = \frac{\sqrt{2\pi}}{T} f_{\frac{2\pi}{T}}(\omega).$$

□

AIDE-MÉMOIRE

PROPRIÉTÉS DE LA TRANSFORMÉE DE FOURIER

$$\hat{f}(\omega) = \mathscr{F}(f(t)) \overset{\text{déf}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\,\omega\,t}\, f(t)\; dt, \qquad \omega \in \mathbb{R}$$

P.1 Linéarité : $\mathscr{F}(a\,f(t) + b\,g(t)) = a\,\mathscr{F}(f(t)) + b\,\mathscr{F}(g(t))$

P.2 Changement d'échelle : $\mathscr{F}(\,f(a\,t)) = \frac{1}{|a|}\hat{f}(\frac{\omega}{a})$ pour $a \neq 0$

P.3 Transposition : $\mathscr{F}(f(-t)) = \hat{f}(-\omega)$

P.4 Translation : $\mathscr{F}(\,f(t - t_0)) = e^{-i\,\omega\,t_0}\mathscr{F}(f(t))$

P.5 Conjugaison : Soit $f^*(t)$ la conjuguée de $f(t)$ alors

$$\mathscr{F}(f^*(t)) = \left(\hat{f}(-\omega)\right)^*$$

P.6 Transformée d'une dérivée : Si $\lim_{t\to\pm\infty} f^{(k)}(t) = 0$ avec $0 \leq k \leq n$, alors

$$\mathscr{F}(f^{(n)}(t)) = (i\,\omega)^n\,\hat{f}(\omega)$$

P.7 Dérivée d'une transformée de Fourier

$$i^n\,\frac{d^n}{d\omega^n}(\hat{f}(\omega)) = \mathscr{F}(t^n\,f(t))$$

P.8 Symétrie : Si $\mathscr{F}(f(t)) = \hat{f}(\omega)$ alors

$$\mathscr{F}(\hat{f}(t)) = f(-\omega)$$

P.9 Convolution : $\mathscr{F}(f * g) = \sqrt{2\pi}\quad \mathscr{F}(f)\;\; \mathscr{F}(g)$

P.9 Peigne de Dirac : $\mathscr{F}(f_T(t)) = \frac{\sqrt{2\pi}}{T}f_{\frac{2\pi}{T}}(w)$ où $\mathscr{F}(f_T(t))$ signifie $\hat{f}_T(\omega)$