Chapitre 11

Systèmes linéaires continus et discrets

Un système linéaire (le terme système étant pris au sens de l'automatique, à savoir un système dynamique) est un objet du monde matériel qui peut être décrit par des équations linéaires (équations linéaires différentielles ou aux différences), ou encore qui obéit au principe de superposition : toute combinaison linéaire des variables de ce système est encore une variable de ce système.
Les systèmes non linéaires sont plus difficiles à étudier que les systèmes linéaires. Néanmoins, en linéarisant (quand c'est possible) un système non linéaire autour d'un point d'équilibre ou d'une trajectoire, on obtient un système linéaire qui représente correctement le système non linéaire au voisinage de ce point d'équilibre ou de cette trajectoire.

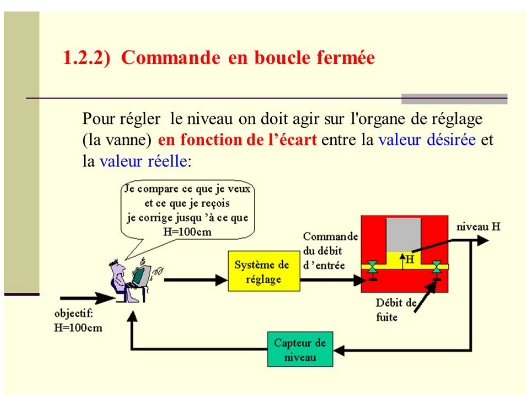
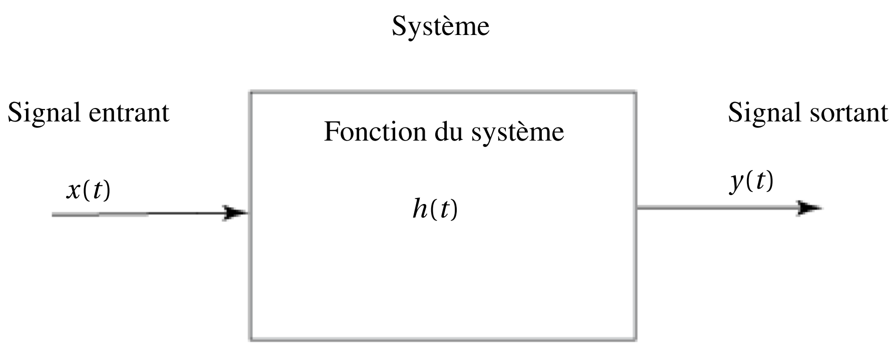


FIGURE 11.1: Système asservi

Définition 11.1. *Un système est un modèle mathématique d'un processus physique qui relie un **signal entrant** (ou excitation) à un **signal sortant** (ou réponse).*

Schématiquement, on représente un système comme suit :



Plus abstraitement, un système est un opérateur $T : X \to Y$ où X et Y sont des espaces de fonctions (de dimension infinie lorsqu'ils sont linéaires) et on note

$$T(x(t)) = y(t) \qquad \text{ou} \qquad T(x(n)) = y(n)$$

selon que le système est continu ou discret.

Définition 11.2. *Un système est dit **linéaire** si les deux conditions suivantes sont vérifiées :*

1. $T(x_1(t) + x_2(t)) = T(x_1(t)) + T(x_2(t))$
2. $T(\alpha x(t)) = \alpha T(x(t)), \qquad \forall \alpha \in \mathbb{C}.$

Remarquons que de la condition 2. si $x(t) = 0$, nous avons

$$T(\alpha \cdot 0) = \alpha T(0) \iff (\alpha - 1)\, T(0) = 0 \Rightarrow T(0) = 0 \;\text{ car cette expression doit être valable } \forall \alpha$$

En pratique, les 2 conditions se résument à vérifier que :

$$T(\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)) = \alpha T(x_1(t)) + \beta T(x_2(t)) \qquad \text{et qui soit valable } \; \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

Exemple 11.1. *Montrez que le système de différence avant suivant est linéaire :*

$$T(x(t)) = x(t+1) - x(t)$$

Solution.
On a

$$\begin{aligned}
T(x_1(t)) &= x_1(t+1) - x_1(t) \\
T(x_2(t)) &= x_2(t+1) - x_2(t) \\
T(\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)) &= \big[\alpha x_1(t+1) + \beta x_2(t+1)\big] - \big[\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)\big] \\
&= \alpha[\underbrace{x_1(t+1) - x_1(t)}_{T(x_1(t))}] + \beta[\underbrace{x_2(t+1) - x_2(t)}_{T(x_2(t))}] \\
&= \alpha T(x_1(t)) + \beta T(x_2(t))
\end{aligned}$$

Définition 11.3. *Un système linéaire est dit* ***stationnaire*** *(noté S.L.S.) (ou invariant par translation) si la condition suivante est vérifiée :*

$$T(x(t-t_0)) = y(t-t_0), \qquad \forall\, t_0 \in \mathbb{R}$$

L'origine des temps n'a pas d'importance. (une même entrée appliquée à 2 instants différents provoque une même réponse décalée d'autant).

Fonctions propres des S.L.S. en temps continu

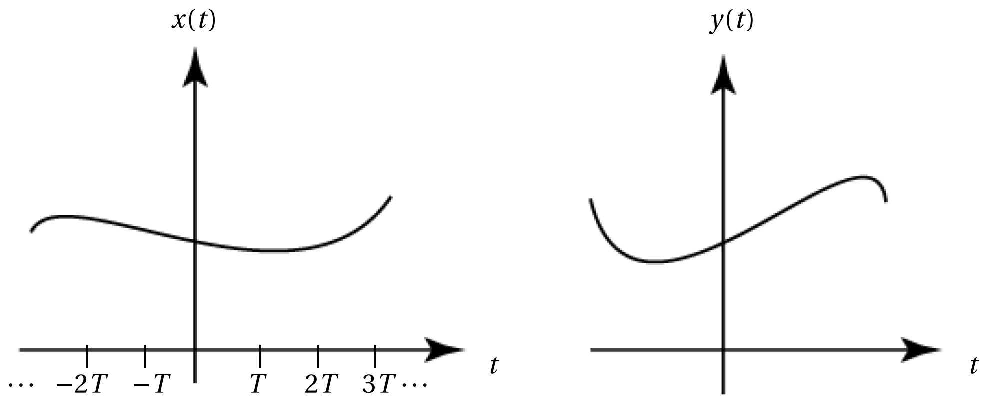
Théorème 11.1. *Les fonctions e^{st}, $t \in \mathbb{R}$ où $s \in \mathbb{C}$ est une constante, sont des* ***fonctions propres*** *pour tous les S.L.S.*
Remarque, en Algèbre linéaire, nous avons $AX = \lambda X$. Donc de façon similaire, nous avons

$$x(t) \longrightarrow T(x(t)) = \lambda x(t)$$

Preuve.
Soit $x(t) = e^{st}$. Alors

$$\begin{aligned}
T(x(t)) &= (x * h)(t) && \text{où h est la réponse impulsionnelle du S.L.S.} \\
&= (h * x)(t) && \text{par commutativité} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)\, d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{s(t-\tau)}\, d\tau \\
&= \underbrace{\Big[\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-s\tau}\, d\tau\Big]}_{=\lambda(s)} e^{st} \\
&= \lambda(s)\, e^{st} && \text{Ici } \lambda(s) \text{ est appelée la valeur propre}
\end{aligned}$$

11.1 Systèmes linéaires stationnaires discrets



Pour un SLS discret, l'entrée $x(t)$ et la sortie $y(t)$ sont définies sur des valeurs discrètes

$$t = ..., -3T, -2T, -T, 0, T, 2T, 3T, ..., nT, ... \qquad \text{où } n \in \mathbb{Z}$$

Souvent, ces systèmes apparaissent lorsqu'un signal continu est échantillonné, c'est-à-dire qu'on considère les valeurs

$$..., x(-2T), x(-T), x(0), x(T), x(2T), x(3T), ...et..., y(-3T), y(-2T), y(-T), y(0), y(T), y(2T), \ldots$$

En considérant $x(n\,T)$, on peut supposer que $T = 1$ et que le signal est échantillonné en $t = ..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...$, ce qui définit une suite de nombres $x(n)$ pour $\forall n \in \mathbb{Z}$.

Exemple 11.2. *Soit la fonction de Heaviside (fonction échelon) définie par*

$$u(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } \ t < 0 \\ 1, & \text{si } \ t \geq 0. \end{cases}$$

En posant $t = nT$ et en prenant $T = 1$, nous avons la suite :

$$x(n) = u(n) = \begin{cases} 0, & \text{si } \ n < 0 \\ 1, & \text{si } \ n \geq 0. \end{cases}$$

Exemple 11.3. *Soit une impulsion $\delta(t)$ définie par*

$$\delta(t) = \begin{cases} 1, \text{ si } & t = 0 \\ 0, \text{ si } & t \neq 0. \end{cases}$$

En posant $t = nT$ et en prenant $T = 1$, nous avons la suite :

$$x(n) = \delta(n) = \begin{cases} 1, \text{ si } & n = 0 \\ 0, \text{ si } & n \neq 0. \end{cases}$$

Dans le cas d'un SLS discret, la stationnarité s'exprime par

$$T(x(n - n_0)) = y(n - n_0)$$

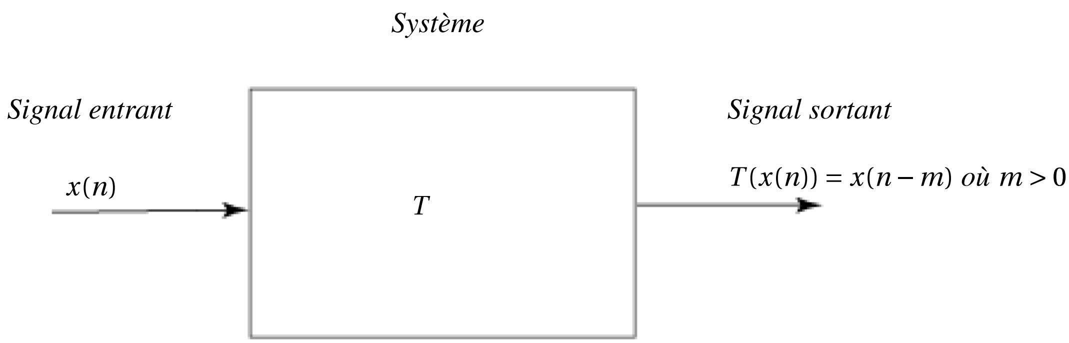
pour tout $n_0 \in \mathbb{Z}$ avec n_0 fixé.

Dans la suite de ce chapitre, tous les systèmes linéaires sont discrets.

Définition 11.4. *Un système linéaire stationnaire (SLS) est* ***initialement au repos*** *si*

$$x(n) = y(n) = 0 \qquad \text{pour } n < 0.$$

Exemple 11.4. *Le système **à retard**.*



Ce système est linéaire car

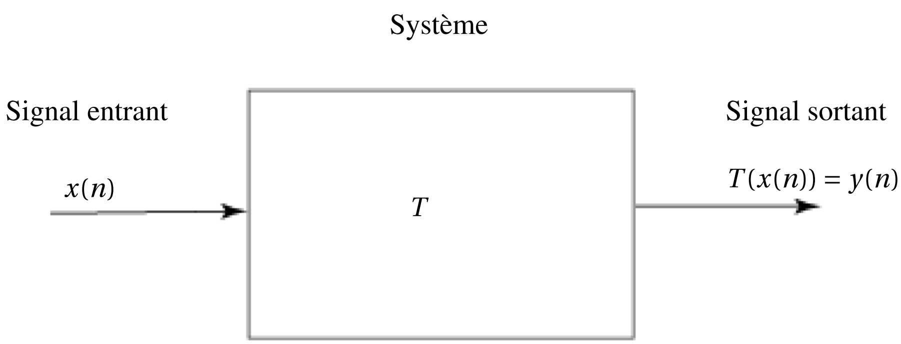
$$\begin{aligned}
T(x_1(n)) &= x_1(n-m) \\
T(x_2(n)) &= x_2(n-m) \\
T((\alpha x_1 + \beta x_2)(n)) &= (\alpha x_1 + \beta x_2)(n-m) \\
&= \alpha \underbrace{x_1(n-m)}_{=T(x_1(n))} + \beta \underbrace{x_2(n-m)}_{=T(x_2(n))} \\
&= \alpha T(x_1(n)) + \beta T(x_2(n))
\end{aligned}$$

De plus, il est stationnaire car

$$\begin{aligned}
T(x(n-p)) &= x(n-p-m) \\
&= x((n-m)-p) = y(n-p)
\end{aligned}$$

11.2 Façons de calculer la réponse $y(n)$ d'un SLS discret.

Soit le schéma-bloc :



Lorsque la sortie $y(n)$ est définie récursivement par une équation, comme par exemple :

$$\begin{cases} y(n+1) - y(n) = x(n) \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

il existe plusieurs façons de trouver $y(n)$.

- 1re façon. Par itérations.

$$\begin{array}{lll}
\text{Si : } n = 0 & \Rightarrow \quad y(1) - \underbrace{y(0)}_{=0} = x(0) & \Rightarrow y(1) = x(0). \\
\quad\;\; n = 1 & \Rightarrow \quad y(2) - \underbrace{y(1)}_{=x(0)} = x(1) & \Rightarrow y(2) = x(0) + x(1). \\
\quad\;\; n = 2 & \Rightarrow \quad y(3) - \underbrace{y(2)}_{=x(0)+x(1)} = x(2) & \Rightarrow y(3) = x(0) + x(1) + x(2). \\
 & \quad \vdots &
\end{array}$$

D'où

$$y(n) = \sum_{i=0}^{n-1} x(i)$$

- 2e façon. En exprimant l'équation récursive sous la forme d'une équation différentielle. Pour cela, il faut connaitre certaines expressions des dérivées (

obtenues par le dév. de Taylor) dont :

$$\begin{aligned}
f'(x_0) &\simeq \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \qquad (11.2.1)\\
f'(x_0) &\simeq \frac{f(x_0)-f(x_0-\Delta x)}{\Delta x}\\
f'(x_0) &\simeq \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0-\Delta x)}{2\Delta x}\\
f''(x_0) &\simeq \frac{f(x_0+\Delta x)-2f(x_0)+f(x_0-\Delta x)}{(\Delta x)^2}\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Ainsi en substituant $f = y, \Delta x = 1, x_0 = n$, dans l'expression (11.2.1), on obtient

$$y(n+1)-y(n) \simeq x(n) \iff y' \simeq x(t) \text{ où } y = y(t)$$

Et comme cette équation différencielle est linéaire et non-homogène, la solution générale non-homogène sera sous la forme

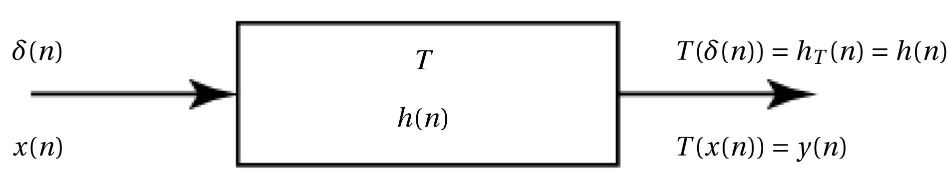
$$y_{g-n-hom} = y_{g-hom} + y_{part.}$$

- 3e façon. Par un produit de convolution.(Voir plus loin)
- 4e façon. Par la transformée en Z.(Voir plus loin)

11.3 Réponse impulsionnelle d'un SLS discret

Définition 11.5. *Lorsque le signal entrant $x(n)$ est une impulsion $\delta(n)$ alors le signal sortant $T(\delta(n))$ est appelé **réponse impulsionnelle** du système et est notée $h_T(n)$ ou tout simplement $h(n)$ s'il n'y a pas d'ambiguité.*

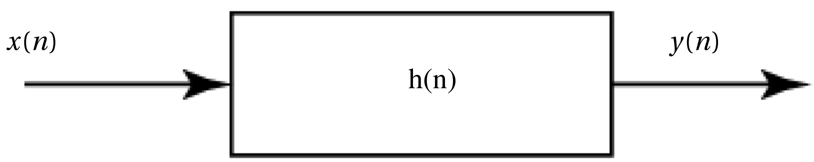
schéma-bloc



La réponse impulsionnelle permet la représentation d'un système en fonction de son entrée et de sa sortie uniquement. Cette réponse impulsionnelle est en quelque sorte la signature du système.

Dans un système SLS, la connaissance de la réponse impulsionnelle $h(n)$ permet de calculer la réponse $y(n)$ à un signal en entré $x(n)$ quelconque.

schéma-bloc



On se rappelle l'impulsion discrétisée $\delta(n)$ qui est définie par :

$$\delta(n) = \begin{cases} 1, \text{ si } & n = 0 \\ 0, \text{ si } & n \neq 0. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \delta(n-k) = \begin{cases} 1, \text{ si } & n-k=0 \iff n=k \\ 0, \text{ si } & n-k \neq 0 \iff n \neq k. \end{cases}$$

Considérons les valeurs discrètes $x(n)$ où $n \in \mathbb{Z}$

$$\cdots x(-2), x(-1), x(0), x(1), x(2), \cdots$$

Ici, il est important de remarquer que toute suite $x(n)$ peut s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned} x(n) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\,\delta(n-k) \\ &= \cdots x(-2)\,\delta(n-(-2)) + x(-1)\,\delta(n-(-1)) + x(0)\,\delta(n-0) + x(1)\,\delta(n-1)\cdots \end{aligned}$$

Vérification pour $n = 1$:

$$x(1) = \cdots x(-2)\ \underbrace{\delta(\underbrace{1-(-2)}_{\neq 0})}_{=0} + x(-1)\ \underbrace{\delta(\underbrace{1-(-1)}_{\neq 0})}_{=0} + x(0)\ \underbrace{\delta(\underbrace{1-0}_{\neq 0})}_{=0} + x(1)\ \underbrace{\delta(\underbrace{1-1}_{=0})}_{=1} + \cdots = x(1)$$

Ainsi si T est un système SLS, par linéarité, on a :

$$\begin{aligned} y(n) &= T(x(n)) \\ &= T\Big(\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\,\delta(n-k)\Big) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\ T(\delta(n-k)) \end{aligned}$$

Remarquons que par stationnarité ($T(x(n-n_0)) = y(n-n_0)$) , on a

$$T(\delta(n-k)) = \underbrace{h_T}_{=h}(n-k) = h(n-k)$$

La suite $\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\ h_T(n-k)$ est appelée le produit de convolution de $x(n)$ et $h(n)$ et noté

$$(x * h)(n)$$

Ce qui nous amène à la définition suivante.

Définition 11.6. *Soit 2 suites $f(n)$ et $g(n)$ avec $n \in \mathbb{Z}$. Alors le produit de convolution de ces 2 suites est :*

$$\boxed{(f * g)(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k)\,g(n-k)}$$

Cas particulier :

$$\text{Si } \begin{cases} f(n)=0, \text{ si } n<0 \iff f(k)=0 \text{ si } k<0 \\ g(n)=0, \text{ si } n<0 \iff g(n-k)=0 \text{ si } n-k<0 \iff k>n \end{cases}$$

alors

$$(f*g)(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k)\,g(n-k)=\underbrace{\sum_{k=-\infty}^{-1}\underbrace{f(k)}_{=0}\,g(n-k)}_{=0}+\sum_{k=0}^{n} f(k)\,g(n-k)+\underbrace{\sum_{k=n+1}^{\infty} f(k)\,\underbrace{g(\underbrace{n-k}_{<0})}_{=0}}_{=0}$$

Donc

$$\boxed{(f*g)(n)=\sum_{k=0}^{n} f(k)\,g(n-k)}$$

Voici quelques formules utiles pour le produit de convolution.

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 1 = n$
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$
3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
4. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}, \qquad a\neq 1$
5. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k a^k = \frac{a^{n+1}(a\,n-n-1)+a}{(a-1)^2}, \qquad a\neq 1$

Exemple 11.5. *Calculez le produit de convolution des suites :*

$$f(n) \quad = \quad \begin{cases} 2^n, \text{ si } \ n \geq 0 \\ 0, \text{ si } \ n < 0 \end{cases} \qquad = \ 2^n \, u(n),$$

(Ici u(n) est la fonction de Heaviside)

$$g(n) \quad = \quad \begin{cases} n, \text{ si } \ n \geq 0 \\ 0, \text{ si } \ n < 0 \end{cases} \qquad = \ n \, u(n)$$

Solution

$$\begin{aligned}
(f * g)(n) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k)\, g(n-k) = \sum_{k=0}^{n} f(k)\, g(n-k) \\
&= \sum_{k=0}^{n} 2^k (n-k) \\
&= n \sum_{k=0}^{n} 2^k - \sum_{k=0}^{n} k 2^k \qquad \text{(et par les formules utiles 4 et 5)} \\
&= n\left(\frac{1-2^{n+1}}{1-2}\right) - \left(0 + \frac{2^{n+1}(n-1)+2}{(2-1)^2}\right) \\
(f * g)(n) &= 2^{n+1} - n - 2.
\end{aligned}$$

Ainsi

$$(f * g)(n) = [\underset{\underset{n=0}{\uparrow}}{0}, 1, 4, 11, 26, 57, 120, \cdots]$$

Méthode tabulaire pour convoluer
(Voir photo ci-dessous)
Il s'agit de disposer les éléments des suites sur une ligne et une colonne puis

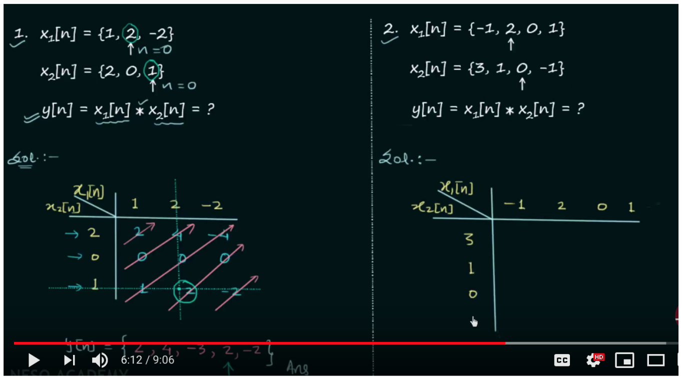


FIGURE 11.2: Convolution

d'effectuer la multiplications des éléments 2 à 2. Par la suite on additionne tous les éléments d'une même flèche diagonale en commencant par la gauche et on reporte ce résultat dans le vecteur suite

$$y(n) = (f * g)(n) = [\text{résultat } \#1, \text{ résultat}\#2, \cdots]$$

La position du $n = 0$ du résultat $y(n)$ se fait en prenant l'intersection (ligne et colonne) du $n = 0$ des suites $f(n)$ et $g(n)$. La position de la flèche diagonale indique à quel endroit mettre le $n = 0$ dans $y(n) = (f * g)(n)$.

Exemple 11.6. *Calculez le produit de convolution des suites :*

$$\begin{aligned} f(n) &= [\underset{\substack{\uparrow \\ n=0}}{1}, 2, 4, 8] \\ g(n) &= [\underset{\substack{\uparrow \\ n=0}}{0}, 1, 2, 3] \end{aligned}$$

***Solution** :*

$$(f * g)(n) = [\underset{\substack{\uparrow \\ n=0}}{0}, 1, 4, 11, 22, 28, 24]$$

Exemple 11.7. *Calculez le produit de convolution des suites :*

$$\begin{aligned} x_1(n) &= [1, \underset{\substack{\uparrow \\ n=0}}{2}, -2] \\ x_2(n) &= [2, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ n=0}}{1}] \end{aligned}$$

Solution :

$$y(n) = [2, 4, -3, \underset{\substack{\uparrow \\ n=0}}{2}, -2]$$