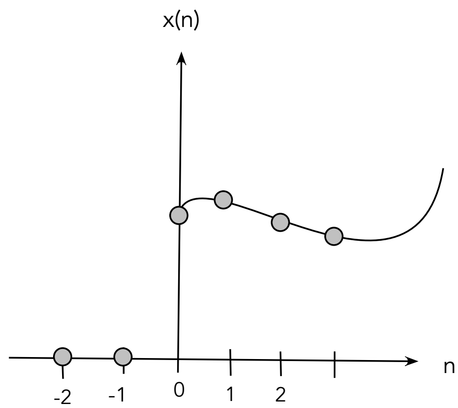
11.4 Causalité et stabilité

Définition 11.7. *Un signal d'entré $x(n)$ (on ne parle pas d'un SLS) est appelé* ***causal*** *si :*

$$x(n) = 0 \quad \text{pour} \quad n < 0.$$



Définition 11.8. *Un SLS est appelé* ***causal*** *si la sortie $y(n)$ ne dépend que des $x(k)$ avec $k \leq n$ (i.e :$n-k \geq 0$). Ainsi, la réponse du système ne dépend pas du futur de l'entrée.*

Dans la relation d'entrée-sortie du système, la sortie à un instant donné ne dépend que du passé et du présent (et non pas du futur) de l'entrée et de la sortie. (Le futur étant défini à partir d'une échelle de temps t dans le sens $\rightarrow$).

Théorème 11.2. *La réponse impulsionnelle $T(\delta(n)) \overset{déf}{=} h(n)$ d'un SLS causal satisfait à $h(n) = 0$, pour $n < 0$.*

Preuve

Eétant donné que la sortie $y(n)$ est obtenue en effectuant le produit de convolution $(h*x)(n)$ alors nous avons

$$\begin{aligned}
y(n) &= (h*x)(n)\\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)\,x(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{-1} h(k)\,x(n-k) + \sum_{k=0}^{\infty} h(k)\,x(n-k)\\
&= \Big(\cdots h(-3)x(\underbrace{n-(-3)}_{=n+3>0}) + h(-2)x(\underbrace{n-(-2)}_{=n+2>0}) + h(-1)x(\underbrace{n-(-1)}_{=n+1>0})\Big) + \\
&\qquad \Big(h(0)\,x(n-0) + h(1)\,x(n-1) + h(2)\,x(n-2) + \cdots\Big)
\end{aligned}$$

Ainsi on constate que $y(n)$ est indépendant de $x(k)$ pour $k > n$ seulement si $h(k) = 0$ lorsque $k < 0$.
Conclusion. Lorsque $n < k$,$h(n) = 0$.

Définition 11.9. *Un SLS est dit **stable** si le signal entrant $x(n)$ est borné, alors le signal sortant $y(n)$ (réponse) sera également borné. Cela signifie qu'il existe des constantes M et L telles que pour tout n*

$$\text{Si} \qquad |x(n)| \le M \qquad \Rightarrow \qquad |y(n)| \le L$$

Théorème 11.3. *Un SLS est **stable** si* $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| < \infty$.

Preuve
Si $\Big|x(n)\Big| \le M$ pour tout n alors

$$\begin{aligned}
|y(n)| &= |(h*x)(n)|\\
&= \Big|\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)\,x(n-k)\Big| \le \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)|\,|x(n-k)| \le M \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)|
\end{aligned}$$

Ainsi, pour que $|y(n)| \le L$, il faut que $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| < \infty$.

11.5 Fonction de transfert d'un SLS discret

Considérons T un SLS et le signal entrant $x(n) = z^n$ où $z \in \mathbb{C}$. Ainsi

$$T(x(n)) = T(z^n) = (h*x)(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)z^{n-k} = \underbrace{\Big(\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)\,z^{-k}\Big)}_{\text{Posons}=H(z)} z^n$$

Alors, on a

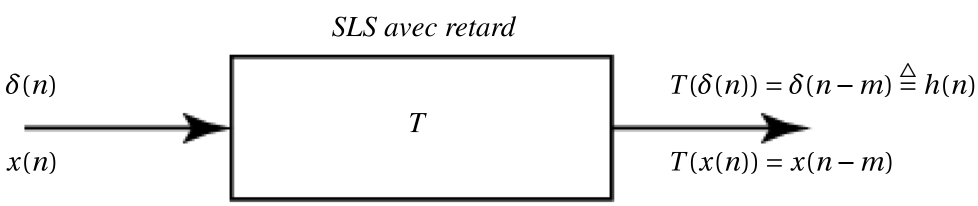
$$T(z^n) = H(z)\, z^n$$

Ceci montre que les z^n sont des **fonctions propres** de T et que $H(z)$ est la **valeur propre** associée à z^n.

Définition 11.10. *La fonction* $H(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)\, z^{-k}$ *est appelée* ***fonction de transfert*** *d'un SLS* T.

Exemple 11.8. *Trouvons la fonction de transfert de la réponse impulsionnelle* $\delta(n)$ *du SLS avec retard. Rappel : un système* T *est à retard lorsque*

$$T(x(n)) = x(n-m)$$

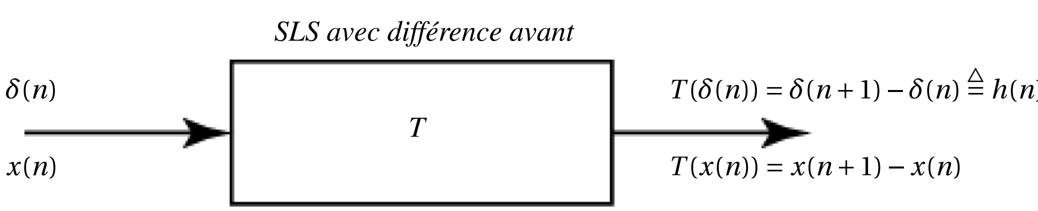


alors la fonction de transfert $H(z)$ *est :*

$$H(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) z^{-k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(k-m) z^{-k} = \underbrace{\delta(0)}_{=1} z^{-m} = z^{-m}, \qquad \text{pour tout } z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}.$$

.

Exemple 11.9. *Si* T *est le SLS avec une différence avant* $T(x(n)) = x(n+1) - x(n)$*,*

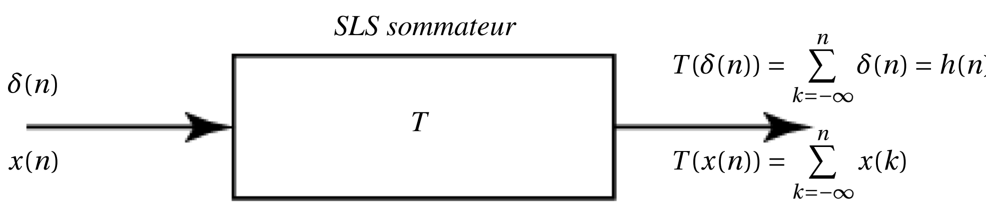


alors en se rappelant que

$$\delta(n) = \begin{cases} 1, & \text{si } n = 0 \\ 0, & \text{si } n \neq 0. \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \delta(k) = \begin{cases} 1, & \text{si } k = 0 \\ 0, & \text{si } k \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} H(z) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)\, z^{-k} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Big[\delta(k+1) - \delta(k)\Big]\, z^{-k} \\ &= \cdots + \Big[\underbrace{\delta(-2+1)}_{=0} - \underbrace{\delta(-2)}_{=0}\Big]\, z^{-(-2)} + \Big[\underbrace{\delta(-1+1)}_{=1} - \underbrace{\delta(-1)}_{=0}\Big]\, z^{-(-1)} + \Big[\underbrace{\delta(0+1)}_{=0} - \underbrace{\delta(0)}_{=1}\Big]\, z^{-0} + \\ &\qquad \Big[\underbrace{\delta(1+1)}_{=0} - \underbrace{\delta(1)}_{=0}\Big]\, z^{-1} + \cdots \\ &= 1z^1 - 1z^0 \\ &= z - 1, \qquad \text{pour tout } z \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Exemple 11.10. *Si T est le SLS sommateur* $T(x(n)) = \sum_{k=-\infty}^{n} x(k)$,



Remarquons que

$$h(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} \delta(n) = \cdots + \underbrace{\delta(-2)}_{=0} + \underbrace{\delta(-1)}_{=0} + \underbrace{\delta(0)}_{=1} + \cdots + \underbrace{\delta(n)}_{=0} = 1 = u(n)$$

alors

$$H(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)\, z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} 1\, z^{-k} = \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} = \frac{z}{z-1}, \qquad \text{si } \left|z\right| > 1. \text{ (Série géo.)}$$

En pratique ,on appelle **fonction de transfert** $H(z)$ d'un système discret ou échantillonné, le rapport des transformées en z de la sortie $Y(z)$ et de l'entrée$X(z)$ du système lorsque les conditions initiales sont nulles. C'est-à-dire

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

La transformée en Z est étudié dans le chapitre suivant.