8.3.3 Intégrales de Fourier

Définition 8.1. *Une intégrale est dite **intégrale de Fourier** lorsqu'elle est de la forme*

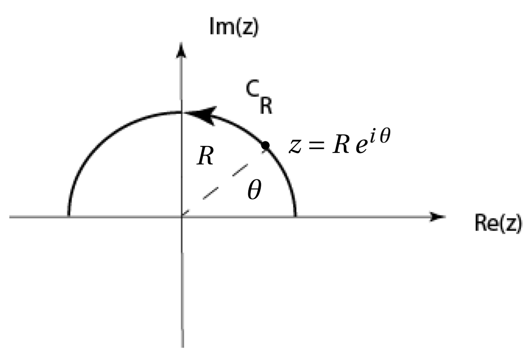
$$\int_{-\infty}^{\infty} g(z)\, e^{i\,a\,z}\, dz \qquad a \in \mathbb{R}$$

Ces intégrales apparaissent dans la transformée de Fourier que nous étudierons plus loin.

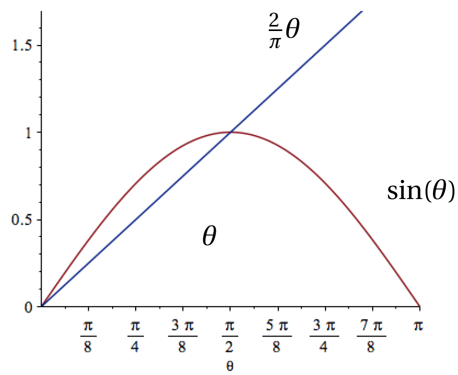
On suppose que $a > 0$ et que $g(z)$ a un nombre fini de singularités dans le plan complexe et aucune singularité sur l'axe réel. On suppose également que $\lim_{|z|\to\infty} g(z) = 0$.

> **Théorème 8.3.** *(Lemme de Jordan)*
> *Soit C_R le demi-cercle défini par $|z| = R$ et tel que $0 \le arg(z) \le \pi$.*
> *Si $\lim_{|z|\to\infty} g(z) = 0$ et $a > 0$ alors*
>
> $$\lim_{R\to\infty} \int_{|z|=R} g(z)\, e^{i\,a\,z}\, dz = 0$$

Preuve. Puisque nous avons une courbe C_R avec $|z| = R$ et $0 \le arg(z) \le \pi$, cela signifie que nous avons un demi-cercle de rayon R tel qu'illustré à la figure suivante



De plus, en observant le graphique ci-dessous

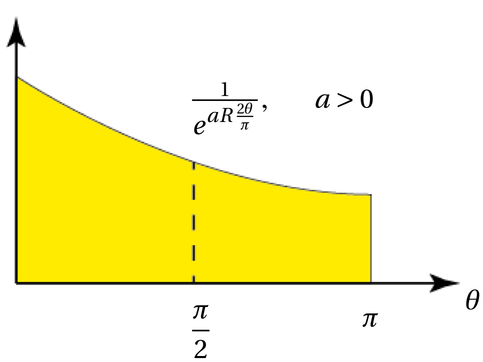


on constate que

$$\sin(\theta) \geq \frac{2\theta}{\pi} \qquad \text{pour } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

Ainsi puisque z appartient au demi-cercle, nous avons $z = R\,e^{i\theta}$ alors

$$\begin{aligned}
|e^{i\,a\,z}| &= |e^{i\,a\,R\,e^{i\theta}}| \\
&= |e^{i\,a\,R[\cos(\theta)+i\sin(\theta)]}| = \underbrace{|e^{i\,a\,R\cos(\theta)}|}_{=1} \cdot |e^{-aR\sin(\theta)}| \\
&= \frac{1}{e^{aR\sin(\theta)}} \leq \frac{1}{e^{aR\frac{2\theta}{\pi}}}
\end{aligned}$$



Donc

$$\begin{aligned}
\lim_{R\to\infty}\left|\int_{|z|=R} g(z)\, e^{i\,a\,z}\, dz\right| &\leq \lim_{R\to\infty}\int_0^{\pi} \underbrace{\left|g(R\,e^{i\theta})\right|}_{\leq\epsilon}\underbrace{\left|e^{i\,a\,R\,e^{i\theta}}\right|}_{\leq\frac{1}{e^{aR\frac{2\theta}{\pi}}}}\ \underbrace{\left|i\,R\,e^{i\theta}\right|}_{=R} d\theta. \\
&\leq \lim_{R\to\infty} \epsilon\, R \int_0^{\pi} \frac{1}{e^{aR\frac{2\theta}{\pi}}}\, d\theta \leq \epsilon\, R \lim_{R\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-aR\dfrac{2\theta}{\pi}}\, d\theta \\
&= \lim_{R\to\infty} \frac{\pi\,\epsilon}{aR2}\left[1-\frac{1}{e^{a\,R}}\right] \\
&= 0
\end{aligned}$$

□

Exemple 8.7. *Montrez que*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{x^2+1}\, dx = \frac{\pi}{e} \qquad \text{et} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x^2+1}\, dx = 0$$

Indice : Utilisez la relation $e^{i\,\alpha x} = \cos(\alpha x) + i\,\sin(\alpha x)$
Cet exercice sera fait en TD