Chapitre 4

Fonctions holomorphes

Notons que le mot holomorphe vient du grec ancien «holos» signifiant entier et «morphe» signifiant forme.

Le but de ce chapitre est de présenter la théorie des fonctions **holomorphes**, également appelées **fonctions analytiques**, qui sont des fonctions « dérivables au sens complexe ». Les fonctions holomorphes sont omniprésentes en mathématiques comme en physique.

4.1 Dérivation d'une fonction complexe

Dans tout ce qui suivra, $U \subset \mathbb{C}$ désignera un ouvert U inclus dans $\mathbb{C}$.

Définition 4.1. *On appelle fonction d'une variable complexe z une application*

$$\text{Ex :} \quad \begin{array}{rcl} f : U \subset \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \to & f(z) = z^2 \\ x + i\,y & \to & f(x+i\,y) = (x+i\,y)^2 = \underbrace{(x^2 - y^2)}_{=u(x,y)} + i\,\underbrace{2\,x\,y}_{=v(x,y)} \end{array}$$

où u et v sont deux fonctions réelles de deux variables réelles.

Définition 4.2. *Soit f une fonction complexe. La dérivée au sens complexe de f au point $z_0 \in \mathbb{C}$ est définie par*

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} \tag{4.1.1}$$

Si cette limite existe et est unique, on la note $f'(z_0)$. Notons que cette limite doit exister indépendamment de la façon dont $\Delta z \to 0$.

Définition 4.3. *Lorsque la limite (voir* 4.1.1*) existe et est unique, on dit que f est* ***dérivable*** *en z_0.*

Exemple 4.1. *Montrez que la fonction $f(z) = z^2$ est dérivable en z_0. Et déduire sa dérivée en z_0.*
Solution :

$$\begin{aligned}
f'(z_0) &= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0+\Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(z_0+\Delta z)^2 - z_0^2}{\Delta z} \\
&= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{z_0^2 + 2z_0\Delta z + (\Delta z)^2 - z_0^2}{\Delta z} \\
&= \lim_{\Delta z \to 0} 2z_0 + \Delta z \\
&= 2\, z_0
\end{aligned}$$

Clairement cette limite existe et elle ne dépend pas de la façon dont $\Delta z \to 0$. Et on en déduit $f'(z_0) = 2z_0$.

Exemple 4.2. *Pour quelles valeurs de z_0 les dérivées de la fonction $f(z) = |z|^2$ existent ?*
Solution :
En utilisant les 2 propriétés suivantes :

$$\begin{cases}
z\overline{z} = |z|^2 \\
\\
\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2},
\end{cases}$$

nous avons

$$\begin{aligned}
f(z_0+\Delta z) &= |z_0+\Delta z|^2 = (z_0+\Delta z)\,(\overline{z_0+\Delta z}) \\
&= (z_0+\Delta z)(\overline{z_0}+\overline{\Delta z}) \\
&= z_0\,\overline{z_0} + z_0\,\overline{\Delta z} + \Delta z\,\overline{z_0} + \Delta z\,\overline{\Delta z} \\
f(z_0) &= |z_0|^2 \\
&= z_0\,\overline{z_0}
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
f'(z_0) &= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{|z_0 + \Delta z|^2 - |z_0|^2}{\Delta z} \\
&= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{z_0\,\overline{z_0} + z_0\,\overline{\Delta z} + \Delta z\,\overline{z_0} + \Delta z\,\overline{\Delta z} - z_0\,\overline{z_0}}{\Delta z} \\
&= \lim_{\Delta z \to 0} \left[\overline{z_0} + z_0 \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} + \overline{\Delta z}\right]
\end{aligned}$$

Analyse :

- *Si* $z_0 = 0$, $f'(z_0) = 0$ *donc la dérivée existe.*
- *Si* $z_0 \neq 0$, *posons* $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$. *Ainsi*

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \left[\overline{z_0} + z_0 \left[\frac{\Delta x - i\Delta y}{\Delta x + i\Delta y}\right] + \overline{\Delta z}\right]$$

En approchant du point z_0 *selon l'axe réel (* $\Delta y = 0$*) ou bien selon l'axe imaginaire (*$\Delta x = 0$*), on constate que* $f'(z_0)$ *n'est pas unique. Donc la dérivée n'existe pas pour* $z_0 \neq 0$.

Conclusion. *La fonction* $f(z) = |z|^2$ *est seulement dérivable au point* $z_0 = 0$ *et* $f'(0) = 0$.

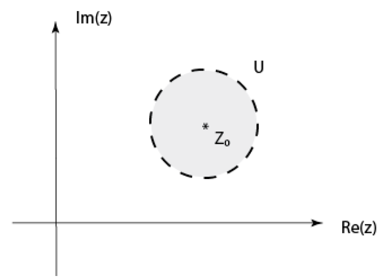
Les formules habituelles pour la dérivée des fonctions élémentaires sont encore valides pour les fonctions complexes correspondantes.

Règle de dérivation

Soient $\lambda \in \mathbb{C}$ et $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ des fonctions dérivables alors :

1. $(\lambda f)' = \lambda f'$
2. $(f \pm g)' = f' \pm g'$
3. $(f\, g)' = f' g + g\, f'$
4. $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{g\, f' - f\, g'}{g^2}$, (si $g \neq 0$).

Définition 4.4. *Une fonction complexe f uniforme (prend une seule valeur) et qui est dérivable en tout point z_0 de U est appelée fonction* ***analytique*** *sur U. Les expressions régulières et holomorphe sont souvent utilisées à la place de analytique.*



Exemple 4.3. *La fonction $f(z) = z^2$ est analytique (holomorphe) en tout point de $\mathbb{C}$. En effet, selon l'****Exemple 4.1****, f est dérivable en chaque point de $\mathbb{C}$. Il suffit de prendre $U = \mathbb{C}$.*

Exemple 4.4. *La fonction $f(z) = |z|^2$ n'est pas analytique (holomorphe) sur $U \subset \mathbb{C}$ car sa dérivée existe seulement en $z_0 = 0$.*

4.2 Équations de Cauchy-Riemann

Ce sont des conditions nécessaires et suffisantes permettant de savoir si une fonction f uniforme est analytique .

Théorème 4.1. *La fonction $f(z) = u(x, y) + i\, v(x, y)$ est analytique dans U si et seulement si u et v sont différentiables dans U et vérifient les conditions (ou équa-*

tions) de Cauchy-Riemann :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{\partial u}{\partial y}. \end{cases}$$

Preuve

- ($\Leftarrow$) Voir le lien

  $http://www.lerepairedessciences.fr/sciences/maths/fonction_c.pdf$

- ($\Rightarrow$)
  Posons

$$\begin{array}{rcl} z & = & x+iy \\ \Delta z & = & \Delta x + i\Delta y \\ z+\Delta z & = & (x+\Delta x)+i(y+\Delta y) \\ f(z)=f(x+iy) & = & u(x,y)+iv(x,y) \\ f(z+\Delta z) & = & u(x+\Delta x, y+\Delta y)+iv(x+\Delta x, y+\Delta y) \end{array}$$

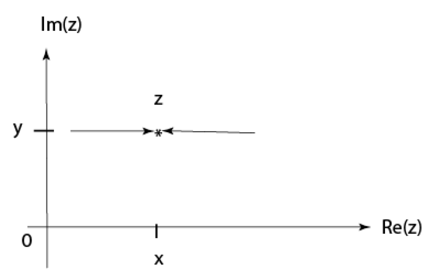
De plus, par hypothèse, la fonction f étant holomorphe alors$f'(z_0)$ existe.
Ainsi :

$$\begin{array}{rcl} f'(z) & = & \displaystyle\lim_{\Delta z\to 0} \frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} \\ & = & \displaystyle\lim_{\Delta z\to 0} \frac{[u(x+\Delta x, y+\Delta y)+iv(x+\Delta x, y+\Delta y)]-[u(x,y)+iv(x,y)]}{\Delta x + i\Delta y} \end{array}$$

et ce quel que soit la façon dont $\Delta x + i\Delta y \to 0$.

- Selon un approche horizontale.

  Si $\Delta y = 0$ et $\Delta x \to 0$ alors $\Delta x + i\Delta y \to 0$.

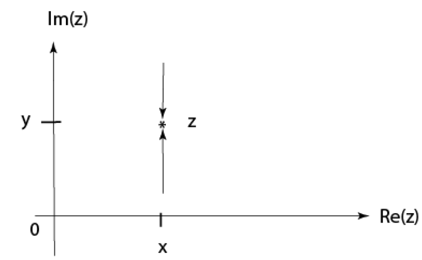


Ainsi

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[u(x+\Delta x, y) + i\,v(x+\Delta x, y)] - [u(x,y) + i\,v(x,y)]}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[u(x+\Delta x, y) - u(x,y)]}{\Delta x} + i \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[v(x+\Delta x, y)] - v(x,y)]}{\Delta x} \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \qquad (1) \end{aligned}$$

- Selon un approche verticale

Si $\Delta x = 0$ et $\Delta y \to 0$ alors $\Delta x + i\Delta y \to 0$.



De façon similaire, on obtient

$$f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y} \qquad (2)$$

Puisque par hypothèse, la dérivée de $f'(z)$ existe alors en comparant les expressions (1) et (2) nous avons

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}.$$

D'où les **conditions de Cauchy-Riemann** (C-R) :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{\partial u}{\partial y}. \end{cases}$$

Géométriquement cela signifie que les courbes de niveau $u(x,y) = C_1^{ste}$ et $v(x,y) = C_2^{ste}$ sont orthogonales ($\nabla u(x,y)(p_0) \bullet \nabla v(x,y)(p_0) = 0$).

Théorème 4.2. *Si $f = u + i\,v$ est dérivable alors*

1. $f'(z) = u_x + i\,v_x$
2. $f'(z) = v_y - i\,u_y$

Preuve *: déjà démontré précédemment. Voir* (1) *et* (2)

Exemple 4.5. *Déterminez si* $f(z) = e^z$ *est analytique et déduire* $f'(z)$.
Solution
Posons $z = x + iy$.
Puisque $f(z) = e^z = e^x e^{iy} = \underbrace{e^x \cos(y)}_{u(x,y)} + i\,\underbrace{e^x \sin(y)}_{v(x,y)}$
alors

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos(y) = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} = e^x \sin(y) = -\dfrac{\partial u}{\partial y} \end{cases} \text{pour tout } \; x + iy\,.$$

Donc f *est analytique sur* $\mathbb{C}$. *De plus,*

$$f'(z) = u_x + i v_x = e^x \cos(y) + i e^x \sin(y) = e^x(\cos(y) + i\sin(y)) = e^z$$

Exemple 4.6. *Déterminez si* $f(z) = \sin(z)$ *est analytique. Si oui, déduire* $f'(z)$.
Rappel :

$$\begin{cases} \sin(a \pm b) = \sin(a)\cos(b) \pm \sin(b)\cos(a) \\ \cos(iy) = \cosh(y) \\ \sin(iy) = i\sinh(y) \\ \dfrac{d}{dy}(\sinh(y)) = \cosh(y) \\ \dfrac{d}{dy}(\cosh(y)) = \sinh(y) \end{cases}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} f(z) = \sin(z) \quad &= \quad \sin(x + iy) \\ &= \quad \sin(x)\underbrace{\cos(iy)}_{=\cosh(y)} + \underbrace{\sin(iy)}_{=i\sinh(y)}\cos(x) = \underbrace{\sin(x)\cosh(y)}_{u(x,y)} + i\,\underbrace{\sinh(y)\cos(x)}_{v(x,y)} \end{aligned}$$

alors

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \cos(x)\cosh(y) = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} = -\sin(x)\sinh(y) = -\dfrac{\partial u}{\partial y} \end{cases} \qquad \text{pour tout } \; x + iy\,.$$

Donc f est analytique sur $\mathbb{C}$. De plus,

$$\begin{aligned}
f'(z) &= u_x + i v_x \\
&= \cos(x)\cosh(y) - i\sin(x)\sinh(y) \\
&= \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)\left(\frac{e^{y}+e^{-y}}{2}\right) - i\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)\left(\frac{e^{y}-e^{-y}}{2}\right) \\
&= \frac{e^{ix+y}+e^{ix-y}+e^{-ix+y}+e^{-ix-y}}{4} - \frac{e^{ix+y}-e^{ix-y}-e^{-ix+y}+e^{-ix-y}}{4} \\
&= \frac{2e^{ix-y}+2e^{-ix+y}}{4} = \frac{2e^{i(x+iy)}+2e^{-i(x+iy)}}{4} = \cos(x+iy) \\
&= \cos(z)
\end{aligned}$$

Une autre façon de calculer $f'(z)$ est :

$$\begin{aligned}
f'(z) &= u_x + i v_x \\
&= \cos(x)\underbrace{\cosh(y)}_{=\cos(iy)} + \underbrace{-i\sin(x)\sinh(y)}_{=\sinh(iy)\sin(x)} \\
&\quad \text{Et par l'identité : } \cos(A \pm B) = \cos(A)\cos(B) \mp \sin(A)\sin(B) \\
&= \cos(x+iy) \\
&= \cos(z)
\end{aligned}$$

i.e. $(\sin(z))' = \cos(z)$,
De façon semblable, $\cos(z)' = -\sin(z)$ *(exercice) et* $\cos(z)$ *est analytique sur* $\mathbb{C}$.

Exemple 4.7. *Déterminez si $f(z) = \overline{z}$ est analytique et déduire s'il a lieu $f'(z)$.*
Solution.
On a $f(z) = \overline{z} = \underbrace{x}_{=u(x,y)} + i(\underbrace{-y}_{=v(x,y)})$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = 1 \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} = -1 \end{cases} \Rightarrow u_x \neq v_y$$

donc f n'est pas analytique en aucun point de $\mathbb{C}$. Ainsi f n'est pas dérivable. Donc $f'(z)$ n'existe pas.

Exemple 4.8. *Déterminez si $f(z) = \ln(z)$ est analytique. Si oui, déduire $f'(z)$.*
Solution.
On a

On a déjà vu que la fonction ln *est discontinue en tout point de l'axe des réels négatifs, incluant l'origine. Donc* ln *n'est pas analytique sur* $D = \mathbb{R}^- \cup \{0\}$

Considérons $z \notin \mathbb{R}^- \cup \{0\}$. *Ainsi*

$$\begin{aligned} f(z) &= \ln\left(|z|\right) + i\left[arg(z) + 2k\pi\right] \qquad \text{(Prenons } k = 0 \text{ pour la branche principale)} \\ &= \ln\left((x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}\right) + i\left[arg(z)\right] \\ &= \underbrace{\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)}_{u(x,y)} + i\,\underbrace{arctan(\frac{y}{x})}_{v(x,y)} \end{aligned}$$

On a

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{x}{x^2+y^2} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{y}{x^2+y^2} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{array} \right. .$$

Les dérivées partielles de u et v sont continues sur $\mathbb{C}\backslash\{0\}$, *en particulier aux points* $z \notin D$. *De plus, les équations de C-R sont satisfaites sur* $\mathbb{C}\backslash D$. *Donc* $ln(z)$ *est analytique sur tout le plan complexe sauf sur l'axe des réels négatif incluant l'origine. La dérivé est*

$$\begin{aligned} f'(x+iy) &= u_x + i\,v_x \\ &= \frac{x}{x^2+y^2} - i(\frac{y}{x^2+y^2}) = \frac{x-i\,y}{x^2+y^2} = \frac{x-i\,y}{(x-i\,y)(x+iy)} = \frac{1}{x+i\,y} \\ &= \frac{1}{z} \end{aligned}$$

Donc

$$(\ln(z)' = \frac{1}{z}$$

Conclusion. Le logarithme complexe est définie sur $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ *et est analytique en tout point du domaine* $\mathbb{C}\backslash\{0\}$.

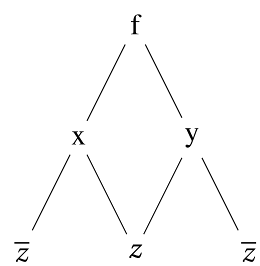
Racourcis Il existe un moyen rapide de savoir une fonction est holomorphe ou non. Si

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0 \Rightarrow \text{ f est analytique (holomorphe)} \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}} \neq 0 \Rightarrow \text{ f n'est pas analytique (holomorphe)} \end{array} \right.$$

Preuve Puisque $z = x + i\,y$ alors $f(z)$ peut être vue comme une fonction de 2 variables : x et y. En effectuant le changement de variables :

$$\begin{cases} x = \dfrac{z+\overline{z}}{2} \\ \\ y = \dfrac{z-\overline{z}}{2\,i} \end{cases} \qquad \Rightarrow f(x,y) = f(z,\overline{z})$$

et par la dérivation en chaîne, nous avons (voir l'arbre de dérivation)



$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} &= \frac{\partial f}{\partial x}\underbrace{\frac{\partial x}{\partial \overline{z}}}_{=\frac{1}{2}} + \frac{\partial f}{\partial y}\underbrace{\frac{\partial y}{\partial \overline{z}}}_{=\frac{-1}{2\,i}} \qquad \text{et comme } f = u(x,y) + i\,v(x,y) \\ &= \Big[\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_{=\frac{\partial v}{\partial y}} + i\,\frac{\partial v}{\partial x}\Big]\cdot\left[\frac{1}{2}\right] + \Big[\underbrace{\frac{\partial u}{\partial y}}_{=-\frac{\partial v}{\partial x}} + i\,\frac{\partial v}{\partial y}\Big]\cdot\left[\frac{-1}{2\,i}\right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

Théorème 4.3. *Si $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ est analytique alors*

$$\underbrace{\nabla^2 u(x,y)}_{\text{laplacien de } u} \triangleq \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

et

$$\underbrace{\nabla^2 v(x,y)}_{\text{laplacien de } v} \triangleq \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$