Chapitre 2

Fonctions élémentaires

Introduction
L'objectif de ce chapître est de montrer que les fonctions élémentaires réelles peuvent être généralisées au corps des complexes et de souligner les particularités qui leur sont associées.

Définition 2.1. *Une fonction d'une variable complexe est une application $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ qui associe à chaque variable complexe $z \in D \subseteq \mathbb{C}$ une autre valeur complexe $f(z)$. C'est-à-dire :*

$$\begin{array}{rcl} f : D \subseteq \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & f(z) \end{array}$$

En considérant $z = x + i\,y$, alors il est possible de décomposer $f(z)$ sous la forme :

$$f(z) = f(x + i\,y) = u(x, y) + i\ v(x, y)$$

où $u(x, y)$ et $v(x, y)$ sont des fonction réelles.

Exemple 2.1. *Pour $z = x + i\,y$ et $f(z) = z^2$, nous avons :*

$$f(z) = z^2 = (x + i\,y)^2 = \underbrace{(x^2 - y^2)}_{u(x,y)} + i\ \underbrace{2\,x\,y}_{v(x,y)}$$

Remarque : On ne peut évidemment pas tracer le graphe d'une fonction à valeurs complexes d'une variable complexe, comme on trace celui d'une fonction réelle d'une variable réelle : Il faudrait faire des desseins dans l'espace à 4 dimensions (2 pour les coordonnés x et y, 2 pour les valeurs $u(x, y)$ et $v(x, y)$. Par contre, on peut tracer des lignes dans le plan relatives à certains attributs de $f(z)$. Par exemple $|f(z)|$, $u(x, y) = C^{ste}$, $v(x, y) = C^{ste}$.

2.1 Fonctions uniformes

Définition 2.2. *Une fonction est dite **uniforme** si tout élément du domaine de définition de cette fonction a une seule image .*

Parmi les fonctions uniformes, nous avons :

2.1.1 Les fonctions polynômiales.

$$P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n, \qquad \text{où } a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}.$$

2.1.2 Les fonctions rationnelles : quotient de 2 polynômes.

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}, \qquad \text{où } P \text{ et } Q \text{ sont des polynômes.}$$

2.1.3 La fonction exponentielle.

$$e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x \left[\cos(y) + i\sin(y)\right].$$

Propriétés de la fonction exponentielle.

- $P.1.$ $e^{z+2\pi i} = e^z$ (L'exponentielle complexe est "périodique")
- $P.2.$ $\overline{(e^z)} = e^{\overline{z}}$
- $P.3.$ $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}\, e^{z_2}$

Preuve. P1 et P2 laissées en exercices
Pour $P3$.
Considérons $z_1 = x_1 + iy_1$ et $z_2 = x_2 + iy_2$. Ainsi

$$\begin{aligned} e^{z_1+z_2} &= e^{(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)} \\ &= e^{x_1+x_2}(\cos(y_1+y_2) + i\sin(y_1+y_2)) \qquad \text{(Par la formule d'Euler)} \end{aligned}$$

En utilisant les identités : $\begin{cases} \cos(a\pm b) = \cos(a)\cos(b) \mp \sin(a)\sin(b) \\ \sin(a\pm b) = \sin(a)\cos(b) \pm \cos(a)\sin(b) \end{cases}$

nous avons

$$\begin{aligned}
e^{z_1+z_2} &= e^{x_1}e^{x_2}\left[\cos(y_1)\cos(y_2)-\sin(y_1)\sin(y_2)+i(\sin(y_1)\cos(y_2)+\cos(y_1)\sin(y_2))\right]\\
&= e^{x_1x_2}\left[\cos(y_1)\cos(y_2)+i\cos(y_1)\sin(y_2)+i\sin(y_1)\cos(y_2)+i^2\sin(y_1)\sin(y_2\right]\\
&= e^{x_1x_2}\left[(\cos(y_1)+\sin(y_1))(\cos(y_2)+i\sin(y_2))\right]\\
&= e^{x_1}(\cos(y_1)+i\sin(y_1))e^{x_2}(\cos(y_2)+i\sin(y_2))\\
&= e^{z_1}e^{z_2}
\end{aligned}$$

Remarque : Si $z \in \mathbb{R}$ alors $z = x + i\cdot 0$ et

$$e^z = e^x(\cos(0)+i\sin(0)) = e^x.$$

Ainsi l'exponentielle complexe coïncide avec l'exponentielle habituelle lorsque son argument est réel.

2.1.4 Les fonctions trigonométriques.

- Si $\theta \in \mathbb{R}$ alors

$$\begin{cases} e^{i\theta} = \cos(\theta)+i\sin(\theta) & \text{(formule d'Euler)}\\ e^{-i\theta} = \cos(\theta)-i\sin(\theta) \end{cases}$$

  On a donc

$$\begin{cases} e^{i\theta}+e^{-i\theta} = 2\cos(\theta)\\ e^{i\theta}-e^{-i\theta} = 2\,i\,\sin(\theta) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos(\theta) = \dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\\ \sin(\theta) = \dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2\,i} \end{cases}$$

- Si $z \in \mathbb{C}$ alors

$$\begin{cases} e^{iz} = \cos(z)+i\sin(z)\\ e^{-iz} = \cos(z)-i\sin(z) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos(z) = \dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\\ \sin(z) = \dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2\,i} \end{cases}$$

Remarque :

- Si $z = 0 + i \cdot 1 \in \mathbb{C}$, alors
$$\cos(z) = \cos(i) = \frac{e^{ii} + e^{-ii}}{2} = \frac{e^{-1} + e^{1}}{2} \simeq 1.54 > 1$$
Donc sur $\mathbb{C}$, les fonctions cos et sin peuvent prendre des valeurs en dehors de l'intervalle $[-1, 1]$.
- Si $z = x + i \cdot 0 \in \mathbb{R}$ alors
$$\cos(z) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \frac{(\cos(x) + i\sin(x)) + (\cos(x) - i\sin(x))}{2} = \cos(x)$$
De même le $\sin(z)$ se réduit à $\sin(x)$ lorsque $z \in \mathbb{R}$.
- On peut montrer que sur $\mathbb{C}$, les identités trigonométriques habituelles sont encore valide pour le sin et le cos .

Exemple 2.2. *Montrez que* $\cos^2(z) + \sin^2(z) = 1$.
On a
$$\begin{aligned}
\cos^2(z) &= \left[\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\right]^2 = \frac{e^{2iz} + 2e^{iz}e^{-iz} + e^{-2iz}}{4} = \frac{e^{2iz} + 2 + e^{-2iz}}{4} \\
\sin^2(z) &= \left[\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right]^2 = \frac{e^{2iz} - 2e^{iz}e^{-iz} + e^{-2iz}}{-4} = \frac{e^{2iz} - 2 + e^{-2iz}}{-4} \\
&\Rightarrow \quad \cos^2(z) + \sin^2(z) = \frac{2+2}{4} = 1.
\end{aligned}$$

On peut représenter les fonctions $\sin(z)$ et $\cos(z)$ sous la forme $u + iv$ à l'aide des fonctions hyperboliques réelles
$$\sinh(\theta) = \frac{e^{\theta} - e^{-\theta}}{2}, \qquad \cosh(\theta) = \frac{e^{\theta} + e^{-\theta}}{2}.$$
C'est-à-dire que si $z = x + iy \in \mathbb{C}$ alors
$$\sin(z) = \sin(x)\cosh(y) + i\cos(x)\sinh(y)$$
$$\cos(z) = \cos(x)\cosh(y) - i\sin(x)\sinh(y).$$

2.1.5 Les fonctions hyperboliques complexes.

En sachant que
$$\begin{cases} \sinh(z) = \dfrac{e^{z} - e^{-z}}{2} \\[2ex] \Rightarrow \cosh(z) = \dfrac{e^{z} + e^{-z}}{2} \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\cosh^2(z) - \sinh^2(z) = 1}$$

Preuve.

$$\begin{aligned}
\cosh^2(z) - \sinh^2(z) &= \left(\frac{e^z + e^{-z}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^z - e^{-z}}{2}\right)^2 \\
&= \frac{1}{4}\Big[\left(e^{2z} + 2e^{-z}e^z + e^{-2z}\right) - \left(e^{2z} - 2e^{-z}e^z + e^{-2z}\right)\Big] = 1
\end{aligned}$$

$\square$

Notons que

$$\boxed{\begin{cases} \cos(iz) = \cosh(z) \\ \sin(iz) = i\sinh(z). \end{cases}}$$

Preuve.

$$\begin{aligned}
\cos(i\,z) &= \frac{e^{i(iz)} + e^{-i(iz)}}{2} = \frac{e^{-z} + e^z}{2} = \cosh(z) \\
\sin(i\,z) &= \frac{e^{i(iz)} - e^{-i(iz)}}{2\,i} = \frac{e^{-z} - e^z}{2\,i} = \frac{-1}{i}\Big[\underbrace{\frac{e^z - e^{-z}}{2}}_{=\sinh(z)}\Big] = i\,\sinh(z)
\end{aligned}$$

$\square$

2.2 Fonctions multiformes

Définition 2.3. *Une fonction est dite* ***multiforme*** *si au moins un élément du domaine de définition de cette fonction a plusieurs images .*

Parmi ces fonctions multiformes, nous retrouvons en autres les fonctions :

$$\ln(z), \sqrt{z}, \arcsin(z), \arccos(z), \text{etc.}$$

2.2.1 Le logarithme népérien complexe.

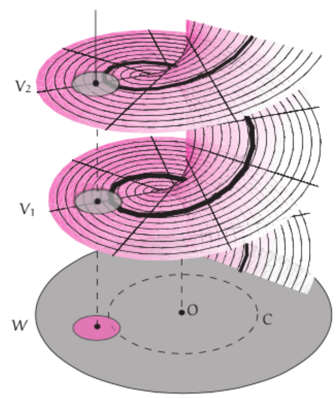

FIGURE 2.1: Partie imaginaire de la fonction logarithmique

La fonction logarithmique est définie comme la fonction inverse de la fonction exponentielle. C'est-à-dire :

$$\ln(z) = w \iff z = e^w.$$

Soient r et θ les coordonnées polaires de z. Posons :

$$\begin{cases} z = re^{i\theta} \\ w = x + i\,y \quad \text{où } x, y \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Ainsi nous avons

$$\begin{aligned} z &= e^w \\ re^{i\theta} &= e^{x+i\,y} \\ r\,[\cos(\theta) + i\sin(\theta)] &= e^x \cdot e^{i\,y} \\ r\,[\cos(\theta+2k\pi) + i\sin(\theta+2k\pi)] &= e^x \cdot e^{i\,y} \qquad \text{où } k \in \mathbb{Z} \\ re^{i\,(\theta+2k\pi)} &= e^x \cdot e^{i\,y} \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

En comparant la partie réelle et imaginaire de (2.2.1), nous obtenons

$$\begin{cases} r = e^x \iff x = \ln(r) \\ y = \theta + 2k\pi \end{cases}$$

D'où $\ln(z) = w = x + i\,y$ devient

$$\boxed{\ln(z) = \ln(r) + i\,(\theta + 2\,k\,\pi) \qquad \text{où } k \in \mathbb{Z}.}$$

□

Puisque la valeur de k est arbitraire, par conséquent, la fonction $f(z) = \ln(z)$ est appelée une fonction multiforme. C'est-à-dire qu'elle n'est pas uniquement définie. Il existe une infinité de fonctions logarithmiques.

Pour éviter toute ambiguité, on définit la **branche principale** des logarithmes complexes comme étant celle pour laquelle $k = 0$ et $-\pi < \theta \leq \pi$.
Pour cette branche principale, nous utilisons parfois la notation $Ln(z)$ plutôt que $\ln(z)$. Ainsi :

$$\boxed{Ln(z) = \ln(r) + i\,\theta \qquad \text{où} - \pi < \theta \leq \pi}$$

Exemple 2.3. *En restant sur la branche principale, évaluez $Ln(z)$ pour les différentes valeurs de z.*

1. *Si $z = 1 + i$, alors $r = \sqrt{2}$ et $\theta = \dfrac{\pi}{4}$. Ainsi*

$$Ln(z) = Ln(1+i) = \ln(\sqrt{2}) + i\,(\frac{\pi}{4} + 2\underbrace{k}_{k=0}\pi) = \ln(\sqrt{2}) + i\,\frac{\pi}{4}$$

2. *Si $z = -1 - i$, alors $r = \sqrt{2}$ et $\theta = -\dfrac{3\pi}{4}$. Ainsi*

$$Ln(z) = Ln(-1-i) = \ln(\sqrt{2}) - i\frac{3\pi}{4}$$

3. *Si $z = 1$, alors $r = 1$ et $\theta = 0$. Ainsi*

$$Ln(z) = Ln(1) = \underbrace{\ln(1)}_{\text{un réel}} + i \cdot 0 = 0$$

4. *Si $z = -1$, alors $r = 1$ et $\theta = \pi$. Ainsi*

$$Ln(z) = Ln(-1) = \underbrace{\ln(1)}_{\text{un réel}} + i\pi = \pi i$$

5. *Si* $z = e^{\frac{7\pi}{4}i}$*, alors* $r = 1$ *et* $\theta = -\frac{\pi}{4}$*. Ainsi*

$$\mathrm{L}n(z) = Ln(e^{\frac{7\pi}{4}i}) = \ln\Big(\underbrace{\left|e^{\frac{7\pi}{4}i}\right|}_{=1}\Big) - i\frac{\pi}{4} = \underbrace{\ln(1)}_{=0} - \frac{\pi}{4}\,i = -\frac{\pi}{4}\,i$$

Remarque :

- $\ln(0)$ n'est pas définie car le logarithme réel de 0 n'est pas définie de même que $\arg(0)$.
- Le logarithme complexe d'un nombre réel négatif $-x$ avec $x > 0$ est bien définie et pour la branche principale, nous avons :

$$\ln(-x) = \ln(x) + i\,\pi$$

- Si $x \in \mathbb{R}^+$ alors le log. complexe et le log. réel coïncide. Par exemple, si $z = 1$, alors $r = 1$ et $\theta = 0$. Ainsi

$$\ln(z) = \ln(1) = \underbrace{\ln(1)}_{\text{un réel}} + i \cdot 0 = 0$$

Propriétés :

P.1 $\boxed{e^{\ln(z)} = z \quad \text{pour tout } z \neq 0}$

Preuve.

$$\begin{aligned} e^{\ln(z)} &= e^{\ln|z| + i(\theta + 2k\pi)} = \underbrace{e^{\ln|z|}}_{=|z| \text{car } |z| \text{est un réel}} \cdot e^{i(\theta+2k\pi)} \\ &= |z|e^{i\theta} = z \end{aligned}$$

P.2 $\boxed{ln(e^z) = z + 2k\pi\, i, \qquad k \in \mathbb{Z}}$

Preuve.

Soit $z = x + i\,y$ alors

$$\begin{aligned} e^z &= e^{x+iy} \Longrightarrow |e^z| = |e^{x+iy}| = |e^x|\,\underbrace{|e^{iy}|}_{=1} = e^x \\ \ln(e^z) &= \ln(|e^z|) + i\Big(arg(e^z) + 2k\pi\Big) \\ &= \underbrace{\ln(e^x)}_{=x,\text{ car } e^x \text{ est réel}} + i(y + 2k\pi) \\ &= \underbrace{x + i\,y}_{=z} + 2k\pi i \\ &= z + 2k\pi i \end{aligned}$$

Ainsi pour avoir $\ln(e^z) = z$, il faut se limiter à la branche principale où $k = 0$ et à l'intervalle $-\pi < \theta \leq \pi$.

P.3 $\boxed{\ln(z_1\, z_2) = \ln(z_1) + \ln(z_2) + 2\, k\, \pi\, i, \qquad k \in \mathbb{Z}}$

Preuve.
Posons

$$\begin{cases} z_1 = r_1\, e^{i\theta_1} \\ \qquad \Rightarrow \ln(z_1) = \ln(r_1) + i\,(\theta_1 + 2\, n\, \pi) \qquad \to \qquad \ln(r_1) + i\,\theta_1 = \ln(z_1) - i\, 2\, n\, \pi \\ z_2 = r_2\, e^{i\theta_2} \\ \qquad \Rightarrow \ln(z_2) = \ln(r_2) + i\,(\theta_2 + 2\, m\, \pi) \qquad \to \qquad \ln(r_2) + i\,\theta_2 = \ln(z_2) - i\, 2\, m\, \pi \end{cases}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \ln(z_1\, z_2) = \ln(r_1\, r_2\, e^{i(\theta_1+\theta_2)}) &= \ln(r_1 r_2) + i(\theta_1 + \theta_2 + 2\, p\, \pi), \qquad p \in \mathbb{Z} \\ &= \underbrace{\ln(r_1) + i\,\theta_1}_{=\ln(z_1) - i\, 2\, n\, \pi} + \underbrace{\ln(r_2) + i\,\theta_2}_{=\ln(z_2) - i\, 2\, m\, \pi} + i\, 2\, p\, \pi \\ &= \ln(z_1) + \ln(z_2) + i\pi\, 2\, \underbrace{(p - n - m)}_{=k}, \qquad k \in \mathbb{Z} \\ \ln(z_1\, z_2) &= \ln(z_1) + \ln(z_2) + i\, 2\, \pi\, k, \qquad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

□

P.3 $\boxed{\ln(\frac{z_1}{z_2}) = \ln(z_1) - \ln(z_2) + 2\, k\, \pi\, i, \qquad k \in \mathbb{Z}}$

Preuve.
Similaire à la démonstration de P.2.

Conclusion.
Pour avoir les mêmes propriétés que sur les réels, il faut rester sur la **Branche principale**. C'est-à-dire prendre $k = 0$ et $-\pi < \theta \leq \pi$.

2.2.2 La fonction racine carrée

Soit $z = r e^{i(\theta_0 + 2k\pi)}$ où $-\pi < \theta_0 \leq \pi$.
Ainsi

$$\begin{aligned} f(z) = z^{\frac{1}{2}} &= \left[r e^{i(\theta_0+2k\pi)} \right]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{r}\, e^{i(\frac{\theta_0}{2} + k\pi)} \\ &= \sqrt{r} \left[\cos(\frac{\theta_0}{2} + k\pi) + i \sin(\frac{\theta_0}{2} + k\pi) \right] \text{ où } k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

D'où

$$\boxed{z^{\frac{1}{2}} = \sqrt{r}\,\left[\cos(\frac{\theta_0}{2} + k\pi) + i\sin(\frac{\theta_0}{2} + k\pi)\right] \text{ où } k \in \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad -\pi < \theta_0 \leq \pi}$$

Ainsi selon la valeur de k nous obtenons plusieurs valeurs (images) de $f(z)$. Par exemple, pour $\theta_0 = \pi$, nous avons

$$\begin{cases} \text{si } k = 0 \Rightarrow f(z) = \sqrt{r}\left[\cos(\frac{\pi}{2} + 0\cdot\pi) + i\sin(\frac{\pi}{2} + 0\cdot\pi)\right] = \sqrt{r}\, i \\ \\ \text{si } k = 1 \Rightarrow f(z) = \sqrt{r}\left[\cos(\frac{\pi}{2} + 1\cdot\pi) + i\sin(\frac{\pi}{2} + 1\cdot\pi)\right] = -\sqrt{r}\, i \end{cases}$$

2.2.3 Exposants complexes

Sur le corps des réels, si $x > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ nous avons

$$x^\alpha = e^{\ln(x^\alpha)} = e^{\alpha \ln(x)}.$$

Généralisons cette dernière relation pour définir les exposants complexes.
Si $z, \alpha \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, alors on définit

$$z^\alpha = e^{\alpha \ln(z)}$$

Comme pour le logarithme, il y a plusieurs valeurs possibles pour z^α. Ainsi

$$\boxed{z^\alpha = e^{\alpha \ln(z)} = e^{\alpha \left[\ln(r) + i\,(\theta_0 + 2k\pi) \right]}, \qquad k \in \mathbb{Z} \text{ et } -\pi < \theta_0 \leq \pi}$$

On définit la branche principale de cette fonction comme étant celle obtenue en employant la branche principale de $\ln(z)$. C'est-à-dire

$$z^\alpha = e^{\alpha \mathrm{L}n(z)} = e^{\alpha \left[\ln(r) + i\,\theta_0 \right]}, \qquad -\pi < \theta_0 \leq \pi$$

Pour la branche principale :

Exemple 2.4. *Calculez* $(1+i)^i$.
Solution.
Posons $z = 1 + i$ *et* $\alpha = i$. *Ainsi* $r = |z| = \sqrt{2}$ *et* $arg(z) = \dfrac{\pi}{4}$. *Donc*

$$\begin{aligned} z^\alpha = (1+i)^i &= e^{i \ln(1+i)} = e^{i \left[\ln(\sqrt{2}) + i \frac{\pi}{4} \right]} \\ &= e^{i \ln(\sqrt{2}) - \frac{\pi}{4}} = e^{-\frac{\pi}{4}} \; e^{i \ln(\sqrt{2})} \\ &= e^{-\frac{\pi}{4}} \left[\cos(\ln(\sqrt{2})) + i \sin(\ln(\sqrt{2})) \right] \\ &\simeq 0.42 + i\, 0.15 \end{aligned}$$

Exemple 2.5. *Calculez* $9^{\frac{1}{2}}$.

- *Si on considère la valeur réelle* $z = 9$, *on a* $9^{\frac{1}{2}} = 3$.
- *Avec la définition de l'exposant complexe :*

$$z^\alpha = 9^{\frac{1}{2}} = e^{\ln(9^{\frac{1}{2}})} = e^{\frac{1}{2} \ln(9)} = e^{\frac{1}{2} \left[\ln(|9|) + i \cdot 0 \right]} = e^{\frac{1}{2} \ln(9)} = e^{\ln(3)} = 3$$

.
Notons que si $x \in \mathbb{R}$ *nous avons* $\sqrt{x^2} = |x|$

- *En considérant toutes les branches du logarithme :*

$$9^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}\left[\ln(|9|)+i(0+2k\pi)\right]} = e^{\ln(3)}\Big[\underbrace{\cos(k\pi)}_{=\pm1} + i\underbrace{\sin(2k\pi)}_{=0}\Big] = \pm 3$$

Propriétés des exposants complexes.

P.1. Si $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ alors $z^{\alpha+\beta} = z^{\alpha} z^{\beta}$

P.2. Si $\alpha \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{Z}$ alors $(z^{\alpha})^n = z^{\alpha n}$

Preuve :

1. exercice (utiliser $z^{\alpha+w} = z^{\alpha} z^{w}$)
2. exercices (utiliser la P.1.)

Remarque : Toutes les autres propriétés habituelles des exposants sont valides seulement à un multiple de $2\pi i$ près. Par exemple :

$$\ln(z^n) = n\ln(z) + 2k\pi\, i, \qquad k \in \mathbb{Z}$$

Remarque. Il faut faire attention :

$$(z^{\alpha})^{\beta} \neq z^{\alpha\beta} \text{dans le cas général si } \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

Par exemple, en prenant $z = -i,\ \alpha = 2, \beta = i$, nous avons :

$$(z^{\alpha})^{\beta} = ((-i)^2)^i = (-1)^i = e^{i\ln(-1)} = e^{i(ln(|-1|)+i(arg(-1)+2k\pi)} = e^{i^2(\pi+2k\pi)} = e^{-\pi-2k\pi}, \qquad k \in \mathbb{Z}$$

$$z^{\alpha\beta} = (-i)^{2i} = e^{2i\ln(-i)} = e^{2i(ln(|-i|)+iarg(-i)+2k\pi)} = e^{2i^2(-\frac{\pi}{2}+2k\pi)} = e^{\pi-4k\pi}, \qquad k \in \mathbb{Z}$$

2.2.4 Les fonctions trigonométriques inverses.

Parmi ces fonctions nous retrouvons : $\arcsin(z)$, $\arccos(z)$, $\arctan(z)$, etc. Ces fonctions peuvent être exprimées au moyen de la fonction logarithme.

- Pour $\arcsin(z)$, nous avons

$$\boxed{\arcsin(z) = -i\ln\left(iz \pm \sqrt{1-z^2}\right) + 2k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}}$$

Preuve
Si $z = \sin(w)$ alors $w = \arcsin(z)$ (ou $\sin^{-1}(z)$) est appelé la fonction inverse de $\sin(z)$. Ainsi

$$\begin{aligned}
z &= \sin(w) = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i} \\
2iz &= e^{iw} - e^{-iw} \\
2ize^{iw} &= e^{iw}e^{iw} - \underbrace{e^{iw}e^{-iw}}_{=1} \\
e^{2iw} - 2ize^{iw} - 1 &= 0 \\
\underbrace{e^{2iw} - 2ize^{iw} - z^2} + z^2 - 1 &= 0 \\
(e^{iw} - iz)^2 + z^2 - 1 &= 0 \\
e^{iw} &= iz \pm \sqrt{1-z^2}, \\
\ln(e^{iw}) &= \ln(iz \pm \sqrt{1-z^2}) \\
\underbrace{\ln(|e^{iw}|)}_{=\ln(1)=0} + i(w + 2k^*\pi) &= \ln(iz \pm \sqrt{1-z^2}) \\
iw &= \ln(iz \pm \sqrt{1-z^2}) - 2k^*\pi i \qquad \text{posons } -k^* = k \\
w &= -i\ln(iz \pm \sqrt{1-z^2}) + 2k\pi \\
w = \arcsin(z) &= -i\ln\left(iz \pm \sqrt{1-z^2}\right) + 2k\pi
\end{aligned}$$

□

Remarque. La fonction arcsin est multiforme. Sa branche principale est celle pour lequel $k = 0$ et telle que $\arcsin(0) = 0$. Ainsi

$$\boxed{\text{Arcsin(z)} = -i\ \text{Ln}\left(iz + \sqrt{1-z^2}\right)}$$

- Pour $\arccos(z)$.
  Si $z=\cos(w)$ alors $w=\arccos(z)$ (ou $\cos^{-1}(z)$) est appelé la fonction inverse de $\cos(z)$. Ainsi,

$$\boxed{\arccos(z) = -i\ln\left(z \pm i\sqrt{1-z^2}\right) + 2\,k\,\pi, \qquad k\in\mathbb{Z}}$$

Preuve

$$\begin{aligned}
z &= \cos(w) = \frac{e^{iw}+e^{-iw}}{2}\\
2z &= e^{iw}+e^{-iw},\\
2\,z\,e^{iw} &= e^{iw}e^{iw} + \underbrace{e^{iw}e^{-iw}}_{=1}\\
e^{2w} - 2ze^{iw}+1 &= 0\\
\underbrace{e^{2iw} - 2ze^{iw}+z^2}-z^2+1 &= 0\\
(e^{iw}-z)^2 - z^2 + 1 &= 0\\
e^{iw} &= z \pm \sqrt{-1+z^2}\\
\ln(e^{iw}) &= \ln(z \pm i\sqrt{1-z^2})\\
\underbrace{\ln(|e^{iw}|)}_{=\ln(1)=0} + i(w+2k^*\pi) &= \ln(z \pm i\sqrt{1-z^2})\\
i(w+2k^*\pi) &= \ln(z \pm i\sqrt{1-z^2})\\
w &= -i\ln(z \pm i\sqrt{1-z^2}) - 2k^*\pi\, i\\
w = \arccos(z) &= -i\ln\left(z \pm i\sqrt{1-z^2}\right) + 2k\pi \ \text{ où } k=-k^*
\end{aligned}$$

□

Remarque. La fonction arccos est une fonction multiforme. La branche principale est celle pour laquelle $k=0$ et $\arccos(1)=0$.

$$\boxed{\text{Arccos(z)} = -i\,\text{Ln}\left(z + i\sqrt{1-z^2}\right)}$$

- Pour arctan(z), nous avons

$$\boxed{\text{arctan(z)} = \frac{-i}{2}\ln\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right) + k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}}$$

Preuve
Si $z = \tan(w)$ alors $w = \arctan(z)$ (ou $\tan^{-1}(z)$) est appelé la fonction inverse de $\tan(z)$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
z &= \tan(w) = \frac{\sin(w)}{\cos(w)} = \frac{e^{iw}-e^{-iw}}{i(e^{iw}+e^{-iw})} \\
z\,i(e^{iw}+e^{-iw}) &= e^{iw}-e^{-iw}, \qquad \text{(Note : si } z=0 \Rightarrow w=0\text{)} \\
\Big(z\,i(e^{iw}+e^{-iw})\Big)e^{iw} &= \Big(e^{iw}-e^{-iw}\Big)e^{iw} \\
e^{2iw}-1-ize^{2iw}-iz &= 0 \\
e^{2iw}(1-iz) &= 1+iz \\
e^{2iw} &= \frac{1+iz}{1-iz}, \qquad \text{où } \; z \neq -i \\
\ln(e^{2iw}) &= \ln\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right) \\
\underbrace{\ln(|e^{2iw}|)}_{=\ln(1)=0}+i(2w+2k^*\pi) &= \ln\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right) \\
i2w &= \ln\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)-2k^*\pi i \\
w &= \frac{-i}{2}\ln\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)-k^*\pi \qquad \text{posons } k=-k^* \\
w = \arctan(z) &= \frac{-i}{2}\ln\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)+k\pi
\end{aligned}$$

□

Remarque. La fonction arctan est une fonction multiforme. La branche principale est celle pour laquelle $k = 0$ et $\arctan(0) = 0$.

$$\boxed{\text{Arctan(z)} = \frac{-i}{2}\text{Ln}\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)}$$

De façon similaire on peut montrer que

$$\boxed{\text{Arccotg(z)} = \frac{-i}{2}\text{Ln}\left(\frac{z+i}{z-i}\right)}$$

Exemple 2.6. *En se restreignant à la branche principale, évaluez les valeurs suivantes :*

1. $Arcsin(1)$.

$$\begin{aligned} Arcsin(1) &= -i\,\mathrm{L}n\Big(\,i\cdot 1+\sqrt{1-1^2}\,\Big) = -i\ln(i)\\ &= -i\Big[\ln(\,\underbrace{\big|i\big|}_{=1}\,)+i\,Arg(i)\Big]\\ &= -i\Big[0+i\frac{\pi}{2}\Big]\\ &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

2. $Arccos(i)$.

$$\begin{aligned} Arccos(i) &= -i\,\mathrm{L}n\Big(i+i\sqrt{1-i^2}\Big) = -i\ln\Big(i+\sqrt{2}i\Big)\\ &= -i\,\mathrm{L}n\Big((1+\sqrt{2})\,i\Big)\\ &= -i\,\Big[\ln\Big(\Big|(1+\sqrt{2})\,i\Big|\Big)+i\,Arg((1+\sqrt{2})\,i)\Big]\\ &= -i\,\Big[\ln\Big(1+\sqrt{2}\Big)+i\frac{\pi}{2}\Big]\\ &= \frac{\pi}{2}-i\ln(1+\sqrt{2}) \end{aligned}$$

Exemple 2.7. *Trouvez toutes les solutions z telles que*

$$\sin(iz) = i.$$

Solution.

- $1^{\text{ière}}$ *façon. En se basant sur la relation*

$$\sin(z) = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$$

nous avons

$$\begin{aligned} \sin(iz) = i \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{e^{i(iz)}-e^{-i(iz)}}{2\,i} = i\\ &\Longleftrightarrow \quad e^{-z}-e^{z} = -2\\ &\Longleftrightarrow \quad e^{-z}(1-e^{2z}) = -2\\ &\Longleftrightarrow \quad 1-e^{2z} = -2e^{z}\\ &\Longleftrightarrow \quad e^{2z}-2e^{z}-1 = 0 \end{aligned}$$

Posons $u = e^z$. *L'équation devient* $u^2-2u-1=0$ *dont les solutions sont*

$$u_{1,2} = \frac{2\pm\sqrt{4-4(1)(-1)}}{2} = 1\pm\sqrt{2}.$$

Pour $u_1 = 1+\sqrt{2}$, *nous avons* $e^z = 1+\sqrt{2}$. *Ainsi*

$$\begin{array}{rcl} \ln(e^z) &=& \ln(1+\sqrt{2}) \\ \Rightarrow z+2\,k_1\,\pi\,i &=& \ln(|1+\sqrt{2}|)+i\,(0+2k_2\pi) \qquad k_1,k_2\in\mathbb{Z} \\ \Rightarrow z &=& \ln(\sqrt{2}+1)+2(\underbrace{k_2-k_1}_{=k})\pi\,i \qquad k\in\mathbb{Z} \\ \Rightarrow z &=& \ln(\sqrt{2}+1)+2\,k\,\pi\,i \qquad k\in\mathbb{Z} \end{array}$$

Pour $u_2 = 1-\sqrt{2}$, *nous avons* $e^z = 1-\sqrt{2}$. *Ainsi*

$$\ln(e^z) = \ln(1-\sqrt{2})$$

$$\Rightarrow z+2k_1\pi i = \ln\left(|1-\sqrt{2}|\right)+i(\pi+2k_2\pi) \qquad k_1,k_2\in\mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow z = \ln(\sqrt{2}-1)+i\pi(1+\underbrace{-2k_1+2k_2}_{=2k}) \qquad k\in\mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow z = \ln(\sqrt{2}-1)+(2k+1)\pi i \qquad k\in\mathbb{Z}.$$

Les solutions sont :

$$z_1 = \ln(\sqrt{2}-1)+(2k+1)\pi i,\ \text{ et } \qquad z_2 = \ln(\sqrt{2}+1)+2k\pi i \quad \text{où } k\in\mathbb{Z}$$

- 2^ième^ *façon.*

$$\begin{array}{rcl} \sin(iz) &=& i \\ iz &=& \arcsin(i) \qquad \text{et par la relation} \\ && \arcsin(z) = -i\ln\left(iz\pm\sqrt{1-z^2}\right)+2k\pi \\ &=& -i\ln\left(i\,i\pm\sqrt{1-i^2}\right)+2k\pi \\ z &=& -\ln(-1\pm\sqrt{2})-2k\pi i \end{array}$$

Avec le (+)*, nous avons :*

$$\begin{aligned}
z_1 &= -\ln\left(\sqrt{2}-1\right)-2k\pi i\\
&= \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}-1}\right)-2\,k\pi i\\
&= \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}-1}\cdot\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1}\right)-2\,k\pi i\\
&= \ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{2-1}\right)-2\,k\pi i\\
z_1 &= \ln(\sqrt{2}+1)+2\,\pi k^{*}\,i
\end{aligned}$$

Avec le (−)*, nous avons :*

$$\begin{aligned}
z_2 &= -\ln(-1-\sqrt{2})-2k\pi i\\
&= -\left[\ln(|-1-\sqrt{2}|)+i(\pi+2k_1\pi)\right]-2k\pi i\\
&= -\left[\ln(\sqrt{2}+1)-i(\pi+2k_1\pi)\right]-2k\pi i\\
z_2 &= -\ln(\sqrt{2}-1)\underbrace{-(1+2k_1+2k)}_{2k^{*}+1}\pi i\\
&= -\ln(\sqrt{2}+1)+(2k^{*}+1)\pi i\\
&= \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}+1}\cdot\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1}\right)+(2k^{*}+1)\pi\, i\\
&= \ln(\sqrt{2}-1)+(2k^{*}+1)\pi\, i
\end{aligned}$$

Les solutions sont :

$$\begin{cases}
z_2=\ln(\sqrt{2}-1)+(2k^{*}+1)\pi i,\\[1em]
z_1=\ln(\sqrt{2}+1)+2k^{*}\pi i \qquad \text{où } \; k^{*}\in\mathbb{Z}
\end{cases}$$