Chapitre 9

La distribution de Dirac

Un peu d'histoire.

Paul Adrien Maurice Dirac est né le 8 août 1902 à Bristol en Angleterre et est décédé le 20 octobre 1984 à Tallahassee, Floride, aux États-Unis. Il est un physicien et mathématicien britannique et un des « pères » de la mécanique quantique et a prévu l'existence de l'antimatiètre. Il est colauréat avec Erwin Schrödinger du prix Nobel de physique de 1933 « pour la découverte de formes nouvelles et utiles de la théorie atomique».

Pour les besoins du formalisme quantique, Dirac a introduit ce qu'on appelle aujourd'hui la « distribution de Dirac ».

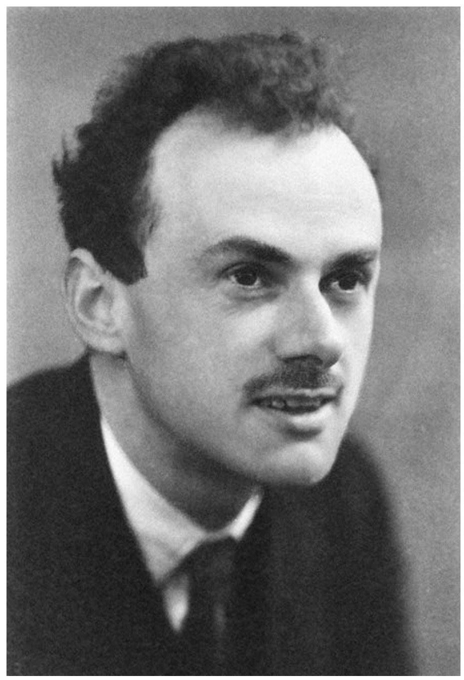


FIGURE 9.1: Paul Dirac 1902-1984

La distribution de Dirac sert en physique à décrire des événements ponctuels. Pour les besoins du formalisme quantique, Dirac a introduit un objet singulier, qu'on appelle aujourd'hui « impulsion de Dirac », notée $\delta(x)$ ou $\delta(t)$ selon les situations.

En outre, cette impulsion (au sens des distributions) $\delta(x)$ représente un signal d'une durée théoriquement nulle et d'énergie finie et elle est définie par les propriétés suivantes :

P.1 $\delta(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 0 \\ \infty & \text{si } x = 0 \end{cases}$

P.2 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\, dx = 1$

P.3 Si $f(x)$ est continue en $x = 0$ alors

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\delta(x-0)\, dx = f(0)$$

Remarque

- L'impulsion $\delta(x)$ n'est pas une fonction. En effet, si $\delta(x)$ était définie sur l'intervalle $]-\infty,\infty[$ alors $\delta(0)$ serait un nombre fini, appelons ce nombre cte, et nous aurions

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\, dx = \int_{-\infty}^{0-\epsilon} \underbrace{\delta(x)}_{=0}\, dx + \lim_{\epsilon\to 0}\int_{0-\epsilon}^{0+\epsilon} \underbrace{\delta(x)}_{=cte}\, dx + \int_{0+\epsilon}^{\infty} \underbrace{\delta(x)}_{=0}\, dx = 0 \neq 1$$

  ce qui n'est pas compatible avec la propriété P.2. souhaitée. Nous avons donc forcément $\delta(0) = +\infty$.
- La distribution de Dirac $\delta(x)$ est utile pour modéliser une **impulsion** en $x = 0$.Voir éventuellement en $\delta(x - x_0)$.

Pour obtenir les propriétés de $\delta(x)$ et pour satisfaire des besoins pratiques, nous construisons des suites d'approximations, $\delta_n(x), n = 1,2,3,\ldots$ de la distribution $\delta(x)$. Ces suites de fonctions $\delta_n(x)$ doivent satisfaire les propriétés suivantes :

a) $\delta(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \delta_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 0 \\ \infty & \text{si } x = 0 \end{cases}$

b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \delta_n(x)\, dx = 1$

c) Si $f(x)$ est continue en $x_0 = 0$ alors

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\delta_n(x)\, dx = f(0)$$

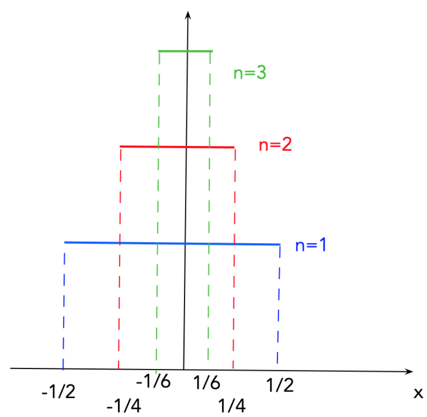
Bien que l'écriture soit quelque peu impropre dans la mesure où l'impulsion de Dirac n'est pas une fonction ordinaire. Il faut comprendre cette égalité comme étant l'intégrale correspondant au calcul de la valeur moyenne de $f(x)$ autour de $x = 0$ avec une durée d'intégration qui tend vers 0. On obtient donc la valeur échantillonnée de $f(x)$ en $x = 0$.

Nous écrivons alors, symboliquement,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\delta(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\delta_n(x)\,dx.$$

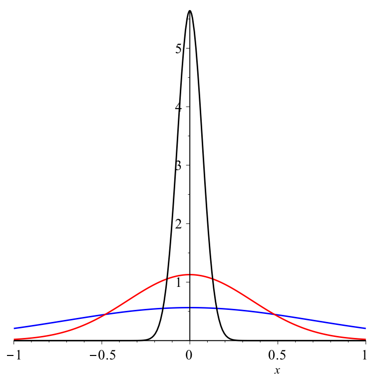
La suite d'approximations $\delta_n(x)$ choisie dépend du contexte. Voici quelques exemples.

i) $$\delta_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < \dfrac{-1}{2n} \\ n & \text{si } \dfrac{-1}{2n} \le x \le \dfrac{1}{2n} \\ 0 & \text{si } x > \dfrac{1}{2n} \end{cases}$$

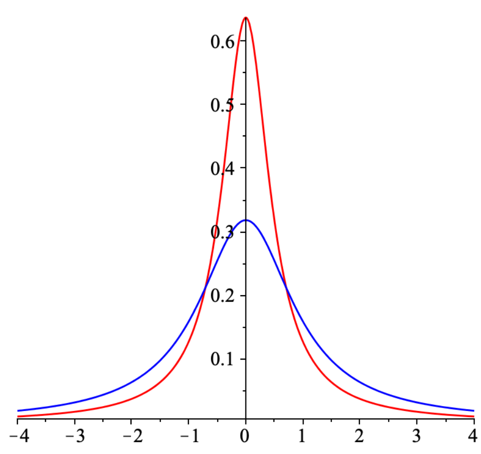


---

ii) $\delta_n(x) = \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2 x^2}$ (Loi gaussienne)



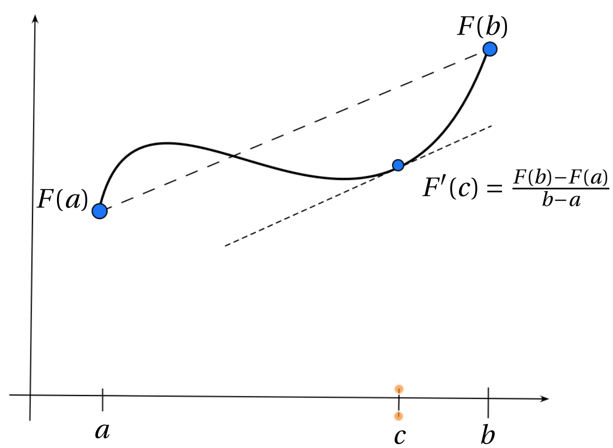
iii) $\delta_n(x) = \frac{n}{\pi} \cdot \frac{1}{1 + n^2 x^2}$.   (Loi de Lorentz)



Exemple 9.1. *Exemple de vérification.*
En utilisant la suite d'approximation i), *montrez que*

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\delta_n(x)\,dx = f(0)$$

si $f(x)$ *est continue en* $x=0$.
Rappel :

> *Le théorème des accroissements finis stipule que si la fonction* $F(x)$ *est dérivable dans l'intervalle* $[a,b]$ *alors il existe un nombre* c *dans* $]a,b[$ *tel que*
>
> $$\frac{F(b)-F(a)}{b-a} = F'(c) \longrightarrow F(b)-F(a) = (b-a)\,F'(c)$$
>
> 
>

Solution.
Nous avons

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\delta_n(x)\,dx &= \int_{-\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{2n}} f(x)\,n\,dx \\ &= n\cdot\int_{-\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{2n}} f(x)\;dx = n\Big[F(x)\Big]_{\frac{-1}{2n}}^{\frac{1}{2n}} \qquad \text{(ici } f(x) = F'(x)\text{)} \\ &= n\cdot\Big[F(\frac{1}{2n}) - F(\frac{-1}{2n})\Big]\end{aligned}$$

En utilisant le théorème de la moyenne, avec

$$a = -\frac{1}{2n}, \qquad b = \frac{1}{2n} \qquad \Rightarrow\ b-a = \frac{1}{n}$$

nous obtenons

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\delta_n(x)\,dx = n\cdot\frac{1}{n}f(c_n) = f(c_n), \qquad \text{où} \qquad -\frac{1}{2n} < c_n < \frac{1}{2n}$$

Ainsi

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\delta_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} f(c_n) = f(0)$$

puisque f *est continue en* $x = 0$.

9.1 Propriétés de la distribution de Dirac

Pour démontrer rigoureusement les propriétés de la distribution $\delta(x)$, il est nécessaire de se situer dans le contexte général de la théorie des distributions. Nous nous contenterons ici de quelques idées de preuves relativement vagues.

P.1 $\delta(-x) = \delta(x)$ (Découle de la définition)

P.2 $\delta(a\,x) = \dfrac{1}{|a|}\delta(x), \qquad a \neq 0$

Preuve. Soit $f(x)$ une fonction continue sur l'intervalle $]-\infty,\infty[$. Nous avons :

- Pour $a > 0$,

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\delta(a\,x)\,dx &\overset{u=a\,x}{=} \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} f(\frac{u}{a})\,\delta(u)\,du \\ &= \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} f(\frac{x}{a})\,\delta(x)\,dx = \frac{1}{a}f(0) = \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\delta(x)\,dx\end{aligned}$$

  D'où

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\left(\delta(a\,x) - \frac{1}{a}\delta(x)\right)dx = 0.$$

  Puisque $f(x)$ est arbitraire, nous avons forcément

$$\delta(a\,x) - \frac{1}{a}\delta(x) = 0$$

  Donc

$$\delta(a\,x) = \frac{1}{a}\delta(x)$$

- Pour $a < 0$, la preuve est similaire lorsque $a < 0$.

□

P.3 Si $f(x)$ est continue en $x = x_0$ alors

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\delta(x-x_0)\,dx = f(x_0)}$$

Il s'agit probablement de la propriété la plus importante

Preuve. Posons le changement de variable $u = x - x_0$. Ainsi

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\delta(x-x_0)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(u+x_0)\,\delta(u)\,du \overset{P.3}{=} f(x_0)$$

□

P.4 $x\,\delta(x) = 0$, pour tout x.

Preuve.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cdot x\,\delta(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} (xf(x))\delta(x)\,dx = \left[x\cdot f(x)\right]_{x=0} = 0$$

alors

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cdot x\,\delta(x)\,dx = 0$$

pour toute fonction arbitraire f continue. Par conséquent il faut que

$$x\,\delta(x) = 0$$

□

P.5 Redéfinissons la fonction de Heaviside, noté $u(x)$, par

$$u(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \; x < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } \; x = 0 \\ 1 & \text{si } \; x > 0 \end{cases}$$

Remarque. La définition de $u(x)$ pour $x = 0$ est une affaire de commodité. Nous avons

$$\boxed{u'(x) = \delta(x)}$$

Ce résultat a du sens car

$$u'(0) = \left.\begin{cases} \displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{u(x)-u(0)}{x-0} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{0-\frac{1}{2}}{x-0} = +\infty & \text{si } \; x<0 \\ \displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{u(x)-u(0)}{x-0} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1-\frac{1}{2}}{x-0} = +\infty & \text{si } \; x>0 \end{cases}\right\} = \delta(0)$$

En général, nous avons

$$\boxed{\frac{d}{dx}u(x-x_0)=\delta(x-x_0)}$$

P.6 $\delta'(x)=-\dfrac{\delta(x)}{x}$ valable pour $x\neq 0$.

Preuve. Puisque $x\delta(x)=0$ alors $(x\delta(x))'=0\Rightarrow \delta(x)+x\delta'(x)=0$.
D'où

$$\boxed{\delta'(x)=-\frac{\delta(x)}{x}}$$

□

P.7 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cdot\delta'(x)\,dx=-f'(0)$

Preuve. Il suffit de faire une intégration par parties. Pour cela, posons

$$\begin{cases} u=f(x), & dv=\delta'(x)\,dx\\ du=f'(x)\,dx, & v=\delta(x)\end{cases}$$

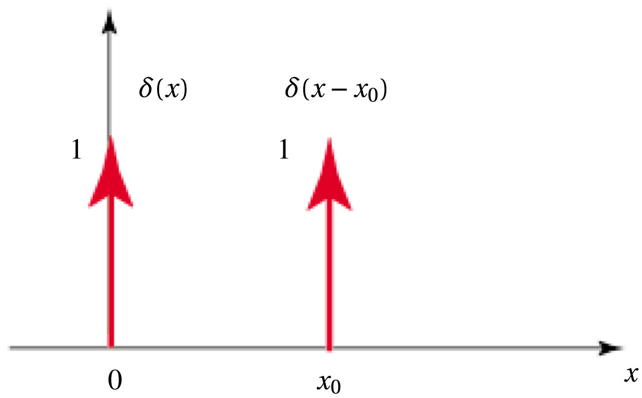
Ainsi

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cdot\delta'(x)\,dx=\underbrace{f(x)\,\delta(x)\Big|_{-\infty}^{\infty}}_{=0}-\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\,\delta(x)\,dx}_{Par P.3}=-f'(0)$$

□

Points à remarquer

1. $\delta(x-x_0)$ n'étant pas une fonction, alors $\delta(x-x_0)$ ne peut être représentée graphiquement. Par contre, on la schématise par le symbole $\uparrow$



Attention : le 1 marqué sur la flèche pleine représente l'aire de cette impulsion (et non la hauteur de l'impulsion).

2. Notons que

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,\delta(x-x_0)\,dx = \begin{cases} f(x_0) & \text{si } x_0 \in [a,b] \\ 0 & \text{si } x_0 \notin [a,b] \end{cases}}$$