ÉCOLE POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

Le génie sans frontières

CAHIER D'EXAMEN

Matricule

CONTRÔLE PÉRIODIQUE - Automne 2011

Nom : ______________________________
(Lettres moulées)

Prénom : ______________________________
(Lettres moulées)

No du cours : **MTH2110** Section et professeur : ______________

Titre du cours : **Méthodes Mathématiques de la Physique I**

DIRECTIVES:

1. Remplissez la partie ci-dessus et signez le cahier.
2. **Donnez une réponse complète et détaillée à chaque question. Chaque réponse doit être justifiée.**
3. N'utilisez que le recto pour rédiger vos réponses; servez-vous du verso comme brouillon.
4. Vérifiez que ce cahier compte **18** feuilles.
5. Ne détachez aucune feuille de ce cahier. **Rédigez vos solutions sur les pages identifiées à cet effet**.
6. **Documentation permise :** une page de notes 8.5'' x 11'', recto verso, préparée par l'étudiant.
7. Une calculatrice non-programmable est permise.

RÉSERVÉ

1.	**/10**
2.	**/10**
3.	**/10**
4.	**/10**
TOTAL:	**/40**

L'étudiant doit honorer l'engagement pris lors de la signature du code de conduite

____
Signature de l'étudiant (e)

Date : Mercredi 26 octobre 2011.
Heure : 15h45 à 17h35.

Question 1 (12 points)

a) **(4 pts)** Soient deux fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ quelconques. On supposera que le produit de convolution $f * g$ existe.

Montrer que $f * g = g * f$.

b) **(8 pts)** Soit la fonction f définie par $f(x) = e^{-x}\, u(x)$, où $u(x)$ désigne la fonction échelon ($u(x) = 0$ pour $x < 0$ et $u(x) = 1$ pour $x \geq 0$).

On demande d'évaluer le produit de convolution $(f * u)(x)$ et d'exprimer le résultat à l'aide de la fonction échelon.

Justifier chaque étape de votre calcul.

Question 2 (13 points)

a) (6 pts) En utilisant le théorème des résidus, trouver la fonction $f(t)$ dont la transformée de Laplace $F(s)$ est donnée par

$$F(s) = \frac{1}{s^2(s-1)}.$$

Dans quelle région du plan complexe la transformée de Laplace $F(s)$ de $f(t)$ existe-telle?

b) (7 pts) On considère l'intégrale curviligne

$$I(R) := \oint_C \frac{dz}{1+z^2},$$

où C est le demi-cercle d'équation $|z| = R$ avec $R > 0$ et $0 \leq \arg(z) \leq \pi$, parcouru du point R au point $-R$.

En utilisant une ou plusieurs inégalité(s) du triangle, montrer que

$$\lim_{R\to\infty} I(R) = 0.$$

Indications: Pour tous z_1 et z_2 dans $\mathbb{C}$, on a

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

et

$$|z_1 - z_2| \geq \big|\, |z_1| - |z_2| \,\big|.$$

Pour une fonction $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ et un chemin C dans le plan complexe, on a

$$\left|\oint_C f(z)dz\right| \leq \oint_C |f(z)||dz|.$$

Question 3 (12 points)

a) (5 pts) Sachant que

$$\sin(\omega\, x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\, n\, \sin(\pi\, \omega)}{n^2 - \omega^2} \sin(n\, x), \quad -\pi < x < \pi,$$

où $\omega > 0$ n'est pas un entier, évaluer

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\left(n^2 - \omega^2\right)^2}.$$

b) (3 pts) Dans la série de Fourier donnée au a) ci-dessus, peut-on dériver par rapport à x sous le signe de sommation et ainsi obtenir la série de Fourier de la fonction $\omega \cos(\omega\, x)$? *Justifier votre réponse.*

c) (4 pts) La transformée de Fourier $\hat{f}(\omega)$ de la fonction $f(x) = \sin\left(x^2/a^2\right)$, où $a > 0$, est donnée par $\hat{f}(\omega) = \frac{a}{2}\left(\cos\left(\frac{a^2\omega^2}{4}\right) - \sin\left(\frac{a^2\omega^2}{4}\right)\right)$. En utilisant le théorème de Fourier, montrer que

$$\int_0^{\infty} \cos(\omega^2)\, d\omega = \int_0^{\infty} \sin(\omega^2)\, d\omega.$$

Question 4 (13 points)

a) (4 pts) Évaluer l'intégrale

$$\int_{-3}^{4} [\delta(x-\pi)\,x + \delta(x+\pi) + u'(x-\pi/4) - u(x-2)] \cos(x)\,dx\,,$$

où $\delta(x)$ désigne de delta de Dirac, u désigne la fonction échelon ($u(x) = 0$ pour $x < 0$ et $u(x) = 1$ pour $x \geq 0$) et u' désigne la dérivée de la fonction échelon.

Justifier votre réponse.

b) (9 pts) Évaluer l'intégrale

$$\int_{0}^{2\pi} (\cos(\theta))^{2n}\,d\theta,$$

où $n \in \{0, 1, 2, ...\}$ est un paramètre, en *justifiant chaque étape de votre démarche.*

Indication: Pour $n \in \{0, 1, 2, ...\}$, on a

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!}\; a^k\; b^{n-k}\,.$$