ÉCOLE POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

Le génie sans frontières

CAHIER D'EXAMEN

Matricule

CONTRÔLE PÉRIODIQUE - Automne 2011

Nom : ______________________________
(Lettres moulées)

Prénom : ______________________________
(Lettres moulées)

No du cours : **MTH2110** Section et professeur : ____________________

Titre du cours : **Méthodes Mathématiques de la Physique I**

DIRECTIVES:

1. Remplissez la partie ci-dessus et signez le cahier.
2. **Donnez une réponse complète et détaillée à chaque question. Chaque réponse doit être justifiée.**
3. N'utilisez que le recto pour rédiger vos réponses; servez-vous du verso comme brouillon.
4. Vérifiez que ce cahier compte **18** feuilles.
5. Ne détachez aucune feuille de ce cahier. **Rédigez vos solutions sur les pages identifiées à cet effet**.
6. **Documentation permise :** une page de notes 8.5'' x 11'', recto verso, préparée par l'étudiant.
7. Une calculatrice non-programmable est permise.

RÉSERVÉ

1.	**/10**
2.	**/10**
3.	**/10**
4.	**/10**
TOTAL:	**/40**

L'étudiant doit honorer l'engagement pris lors de la signature du code de conduite

____
Signature de l'étudiant (e)

Date : **Mercredi 26 octobre 2011.**
Heure : **15h45 à 17h35.**

Question 1 (12 points)

Évaluer l'intégrale

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{k + \sin(x)}$$

où $k > 1$ est un paramètre constant.

Justifier chaque étape de votre calcul.

Question 2 (12 points)

On définit la fonction $\delta_L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$\delta_L(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-L}^{L} e^{i\,\omega\,x} d\omega.$$

Si $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction dont la transformée de Fourier $\hat{\varphi}(\omega)$ existe, montrer que

$$\lim_{L\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_L(x)\,\varphi(x)\,dx = \varphi(0).$$

Justifier chaque étape de votre calcul.

Question 3 (12 points)

La transformée de Laplace d'une fonction $f(t)$ est une fonction $F(s)$ définie par

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-s\,t}\, f(t)\, dt,$$

où $s = x + i\,y$ et $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On supposera que $F(s)$ existe pour $\mathrm{Re}(s) \geq \gamma$, où $\gamma \in \mathbb{R}$ est une constante.

Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction définie par

$$g(t) = \begin{cases} e^{-\gamma\, t}\, f(t) & \text{si } t \geq 0, \\ 0 & \text{si } t < 0. \end{cases}$$

En calculant la transformée de Fourier de g, puis en utilisant le théorème de Fourier, on demande de montrer que

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\,\infty}^{\gamma + i\,\infty} e^{s\,t}\, F(s)\, ds.$$

Justifier chaque étape de votre calcul.

Question 4 (14 points)

a) (7 pts) Soient a et b des constantes réelles et u la fonction échelon ($u(x) = 1$ si $x \geq 0$ et $u(x) = 0$ si $x < 0$).

On demande d'évaluer le produit de convolution

$$u(x-a) * u(x-b)$$

et d'exprimer votre réponse à l'aide de la fonction échelon.

Justifier chaque étape de votre calcul.

b) (7 pts) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction périodique de période 2π définie sur une période par

$$f(x) = |x| \quad \text{pour} \quad |x| < \pi.$$

Sachant que

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos[(2k+1)x]}{(2k+1)^2},$$

évaluer

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3}.$$

Justifier chaque étape de votre calcul.