$\boxed{Q1}$

a) $\left(\frac{-1-i}{\sqrt{2}}\right)^{2-i}$

$$= \exp\left[(2-i)\ln\left(\frac{-1-i}{\sqrt{2}}\right)\right]$$

$$= \exp\left[(2-i)\left[\ln\left|\frac{-1-i}{\sqrt{2}}\right| + i\,\mathrm{Arg}\left(\frac{-1-i}{\sqrt{2}}\right)\right]\right]$$

$$= \exp\left[(2-i)\left[\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right) + i\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right]\right]$$

$$= \exp\left[(2-i)(-i)\frac{3\pi}{4}\right]$$

$$= \exp\left[(-1-2i)\frac{3\pi}{4}\right]$$

$$= \exp\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\exp\left(-\frac{3\pi}{2}i\right)$$

$$= \exp\left(\frac{-3\pi}{4}\right) i, \quad \text{donc}$$

$a = 0$, $b = \exp\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$.

b) $\cos(iz) = -2i$

$$\Rightarrow \frac{e^{iiz} + e^{-iiz}}{2} = 2i,$$

$$\Rightarrow e^{-z} + e^{z} = 4i,$$

$$\Rightarrow 1 + (e^{z})^2 = 4i\, e^{z},$$

$$\Rightarrow (e^{z})^2 - 4i\, e^{z} + 1 = 0,$$

$$\Rightarrow e^{z} = \frac{1}{2}\left(4i \pm \sqrt{(-4i)^2 - 4}\right)$$

$$= 2i \pm \frac{1}{2}\sqrt{-16-4}$$

$$= 2i \pm \sqrt{5}\, i = i(2 \pm \sqrt{5}),$$

$$\Rightarrow z = \ln\left(i(2 \pm \sqrt{5})\right) + i\,2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$= \ln(|2 \pm \sqrt{5}|) \pm i\frac{\pi}{2} + i\,2k\pi,$$

$=: z_{\pm}$, donc

$$z_+ = \underbrace{\ln(2+\sqrt{5})}_{=a} + i\underbrace{\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)}_{=b}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$z_- = \underbrace{\ln(\sqrt{5}-2)}_{=a} + i\underbrace{\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)}_{=b}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$\boxed{Q2}$

$$f(z) = z + |z|^2.$$

(a) $$\lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h},$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{z} + h + |z+h|^2 - \cancel{z} - |z|^2}{h},$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h + (z+h)(\bar{z} + \bar{h}) - |z|^2}{h},$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h + \cancel{z\bar{z}} + z\bar{h} + h\bar{z} + h\bar{h} - \cancel{|z|^2}}{h},$$

$$= \lim_{h \to 0} 1 + z\frac{\bar{h}}{h} + \bar{z} + \bar{h},$$

$$= 1 + \bar{z} + z \lim_{h \to 0} \frac{\bar{h}}{h}.$$

Si $z = 0$, on a

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = 1 + \bar{0} + 0 \lim_{h \to 0} \frac{\bar{h}}{h},$$
$$= 1,$$

quel que soit le chemin suivi, donc $f$ est dérivable en $z = 0$.

(b) D'après le (a), si $h = \Delta x + i\Delta y$, avec $\Delta x, \Delta y \in \mathbb{R}$,

$$\frac{\bar{h}}{h} = \frac{\Delta x - i\Delta y}{\Delta x + i\Delta y}, \text{ donc}$$

$$\frac{\bar{h}}{h} \to 1 \text{ si } \Delta x \to 0 \text{ et } \Delta y = 0,$$

$$\text{et } \frac{\bar{h}}{h} \to -1 \text{ si } \Delta x = 0 \text{ et } \Delta y \to 0,$$

donc la dérivée dépend du chemin suivi pour $z \neq 0$.

Pour dire que $f$ est ana. en 0, il faudrait qu'elle soit dérivable dans un disque de rayon $\varepsilon > 0$ centré en 0, ce qui n'est pas le cas.

On peut aussi montrer que les conditions de Cauchy-Riemann ne sont satisfaites qu'en $z = 0$ : ici $f(z) = x + iy + x^2 + y^2$, donc $u = x + x^2$ et $v = y + y^2$, d'où

$$\begin{cases} u_x - v_y = 1 + 2x - (1 + 2y) = 2(x - y) \neq 0 \text{ sauf si } x = y = 0 \\ u_y + v_x = 0, \end{cases}$$

et donc les conditions CR ne sont satisfaites qu'en $z = 0$.

$\boxed{Q3}$

a) $\int_C \sinh(z)\cosh(\bar{z})\,dz$, où $C$ est le segment allant de $0$ à $\alpha i$, où $\alpha > 0$.

Ici $f(z) := \sinh(z)\cosh(\bar{z})$ n'est pas ana. car $\bar{z}$ n'est pas ana., et la composition d'une fonction ana. et d'une fonction non-ana. est une fonction non-ana. Il faut donc paramétriser. On pose

$$z(t) = ti, \quad 0 \leq t \leq \alpha,$$
$$z'(t) = i.$$

$$I = \int_0^\alpha \sinh(it)\cosh(-it)\, i\,dt$$

$$= \int_0^\alpha \frac{e^{it} - e^{-it}}{2} \; \frac{e^{-it} + e^{it}}{2} \; i\,dt$$

$$= i \int_0^\alpha i \sin(t) \cos(t)\, dt$$

$$= - \frac{1}{2} \sin^2(t) \Big|_0^\alpha$$

$$= -\frac{1}{2}\sin^2(\alpha), \quad \text{donc} \begin{cases} a = -\frac{1}{2}\sin^2(\alpha), \\ b = 0. \end{cases}$$

b) $\int_C z^2 \cos(z^3)\, dz$ où C est le quart de cercle $|z|=1$ allant de 1 à $i$.

<u>Solution</u> Ici $f(z) := z^2 \cos(z^3)$ est entière car elle résulte de la composition et de la multiplication de fonctions entières. La courbe est ouverte et la fonction est entière, donc on peut utiliser le potentiel complexe :

$$I = \frac{1}{3}\sin(z^3)\Big|_1^i$$

$$= \frac{1}{3}\left[\sin(i^3) - \sin(1)\right]$$

$$= \frac{1}{3}\left[\sin(-i) - \sin(1)\right]$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{e^{i(-i)} - e^{-i(-i)}}{2i} - \sin(1)\right]$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{e^{1} - e^{-1}}{2i} - \sin(1)\right]$$

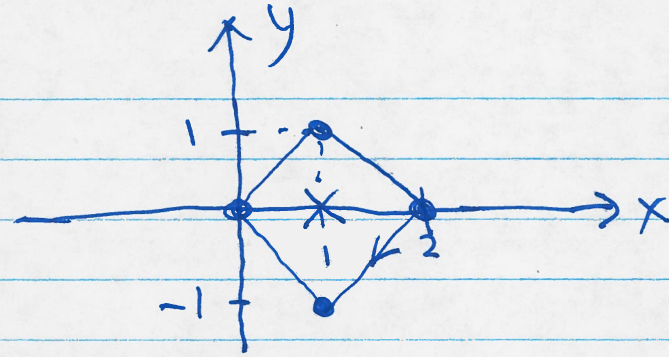
$$= \frac{1}{3}\left[(-i)\sinh(1) - \sin(1)\right]$$

$$= -\frac{1}{3}\sin(1) + i\left(-\frac{1}{3}\right)\sinh(1), \text{ donc}$$

$a = -\frac{1}{3}\sin(1)$, $b = -\frac{1}{3}\sinh(1)$.

5

(A) 4.5




La fonction $f(z) := z\, e^{\frac{1}{z-1}}$ a une seule singularité essentielle en $z=1$, autrement [1] elle est ana. partout.

La singularité est à l'intérieur de la courbe $C$, dont le th. des résidus donne

$$I = -2\pi i \operatorname{Res}(f;\, z=1), \qquad [1]$$

où le "$-$" vient du sens horaire.

Ecrivons la S.L. de $f$ valide pour $|z-1| > 0$ :

$$f(z) = (z-1+1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{(z-1)^n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{(z-1)^{n-1}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{(z-1)^n} \qquad [1]$$

$$= \left[ (z-1) + 1 + \frac{1}{2} \frac{1}{z-1} + \cdots \right]$$

$$+ \left[ \quad 1 + 1 \frac{1}{z-1} + \cdots \right]$$

$$= (z-1) + 2 + \frac{3}{2}\frac{1}{z-1} + \frac{a_{-2}}{(z-1)^2} + \dots$$

et donc $a_{-1} = \frac{3}{2}$, d'où [1]

$$I = -2\pi i \cdot \frac{3}{2}$$

$$= -3\pi i.$$ [0.5]

(B) 4.5 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2} =: I.$

Ici $f(z) := \frac{1}{(1+z^2)^2}$ est ana. partout

sauf pour $z = \pm i$. [0.5]

Il n'y a aucune singularité réelle. [0.5]

on a $|f(z)| \sim \frac{1}{|z|^4}$, $|z| \to \infty$,

$\leq \frac{2}{|z|^4}$ pour $|z| >> 1$,

donc la condition du théorème est satisfaite

avec $M = 2$ et $p = 4 \geq 2$. [1]

on a donc

$I = 2\pi i \operatorname{Res}(f; z=i)$. [0.5]

on a $f(z) = \frac{1}{(z+i)^2(z-i)^2}$, donc on voit que $z = i$ est un pôle double, donc [0.5]

$$\operatorname{Res}(f\,; z=i) = \lim_{z\to i} \frac{d}{dz}\left[(z-i)^2 f(z)\right]$$

$$= \lim_{z\to i} \frac{d}{dz}\left[(z+i)^{-2}\right]$$

$$= -2(z+i)^{-3}\Big|_{z=i}$$

$$= -\frac{2}{(2i)^3} = \frac{-2}{8(-i)} = \frac{1}{4i}$$

$$= -\frac{i}{4},$$ d'où [1]

$$I = 2\pi i \cdot \frac{(-i)}{4}$$ [0.5]

$$= \frac{\pi}{2}.$$

(c) 3 Bonus La fonction

$f(z) := \dfrac{e^{\frac{1}{z}}}{1-z}$ est singulière en

$z=1$ (pôle simple) et en $z=0$ (sing. ess.). Seule $z=0$ est à l'intérieur de la courbe $C$, donc le th. des résidus donne

$J = 2\pi i \operatorname{Res}(f; z=0)$.

La S.L. de $f$ valide pour $|z|<1$ donne

$$f(z) = \frac{1}{1-z} \cdot \exp\left(\frac{1}{z}\right)$$

$$= \left[1+z+z^2+z^3+\dots\right]\left[1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!}\frac{1}{z^2}+\frac{1}{3!}\frac{1}{z^3}+\dots\right]$$

Le coefficient de $z^{-1}$ est

$a_{-1} = 1\times 1 + 1\times\frac{1}{2!} + 1\times\frac{1}{3!} + \dots = e^1 - 1$, donc

$$\boxed{J = 2\pi(e-1)\,i.}$$