Intra MTH2120 A2022 - Solutions (A.S.)

$\boxed{10 \text{ pts}}$

I a) $(1-i)^i = e^{i \ln(1-i)}$,

2 pts

$$= e^{i\left(\ln(\sqrt{2}) - i\frac{\pi}{4}\right)},$$

$$= e^{\frac{\pi}{4}} e^{i\frac{1}{2}\ln(2)},$$

$$= e^{\frac{\pi}{4}} \cos\left(\tfrac{1}{2}\ln(2)\right) + i\, e^{\frac{\pi}{4}} \sin\left(\tfrac{1}{2}\ln(2)\right)$$

b) $\ln(1-\pi) = \ln(|1-\pi|) + i\pi,$

1 pt

$$= \ln(\pi - 1) + i\pi.$$

c) $f(z) = \underbrace{\alpha x}_{=:\, u} + i \underbrace{\beta y}_{=:\, v}$

3 pts

La CCR1 est $u_y + v_x = 0$, or

$$u_y + v_x = \frac{\partial}{\partial y}(\alpha x) + \frac{\partial}{\partial x}(\beta y) = 0,$$

qui est toujours vrai. La CCR2 est $u_x - v_y = 0$,

or $u_x - v_y = \alpha - \beta$. La CCR2 est donc satisfaite si $\boxed{\alpha = \beta}$, auquel cas f prend

la forme $f(z) = \alpha x + i \alpha y = \alpha (x+iy)$,

càd $\boxed{f(z) = \alpha z, \text{ où } \alpha \in \mathbb{C} \text{ est une cte quelconque.}}$

d) $z^4 + z^3 + z - 1 = 0$.

(4 pts)

on voit que i est racine $(1 - i + i - 1 = 0)$
donc $\bar{i} = -i$ est aussi racine car le polynôme est réel
on peut donc mettre en facteur $(z+i)(z-i) = z^2+1$:

$$
\begin{array}{l|l}
z^4 + z^3 + z - 1 & z^2 + 1 \\
\hline
-z^4 - z^2 & z^2 + z - 1 \\
\hline
z^3 - z^2 + z - 1 & \\
-z^3 \quad - z & \\
\hline
-z^2 - 1 & \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

$z^2 + z - 1 = 0$

$$\Rightarrow z = \frac{1}{2}\left(-1 \pm \sqrt{1+4}\right) = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

II) a) 10 pts

4 pts

$$f(z) = \frac{1}{z(z-2)}, \quad 0 < |z-2| < 2,$$

$$|z-2| < 2 \Rightarrow \left| \pm \frac{z-2}{2} \right| < 1.$$

$$f(z) = \frac{1}{(z-2)} \frac{1}{(z-2+2)} = \frac{1}{(z-2)} \frac{1}{2\left(\frac{z-2}{2}+1\right)},$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{(z-2)} \frac{1}{1-\left(\frac{-(z-2)}{2}\right)},$$

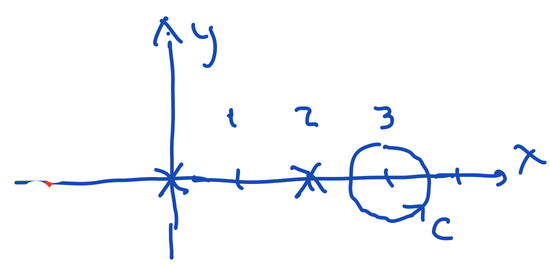
$$= \frac{1}{2} \frac{1}{(z-2)} \sum_{n=0}^{\infty} \left((-1)\frac{(z-2)}{2}\right)^n \quad \text{car} \left| -\frac{z-2}{2} \right| < 1,$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-2)^{n-1}}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} \frac{1}{z-2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8}(z-2) - \cdots$$

donc $\mathrm{Res}(f; z=2) = a_{-1} = \frac{1}{2}$.

b) 3 pt

f est rationnelle donc f est ana. partout dans $\mathbb{C}$ sauf quand $z(z-2) = 0 \Rightarrow z = 0$ ou 2.



Il n'y a pas de singularités sur C ou à l'intérieur de C,

donc l'intégrale est nulle en vertu du th. de Cauchy

c) La fonction considérée $f(z) := z\cos(z^2)$ est

(3 pts)

entière donc l'intégrale ne dépend pas du chemin suivi, d'où

$$\int_0^{1+i} z\cos(z^2)\,dz = \frac{1}{2}\sin(z^2)\Big|_0^{1+i},$$

$$= \frac{1}{2}\sin\left[(1+i)^2\right] - \cancel{\frac{1}{2}\sin(0^2)},$$

$$= \frac{1}{2}\sin\left[1-1+2i\right] = \frac{1}{2}\sin(2i),$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{2i}\left(e^{i2i} - e^{-i2i}\right) = \frac{1}{4i}\left(e^{-2} - e^{2}\right)$$

$$= \frac{i}{2}\,\frac{\left(e^{2} - e^{-2}\right)}{2} = \frac{1}{2}\sinh(2)\, i.$$

III $\boxed{10 \text{ pts}}$ $f(z) := \dfrac{\sin(z)}{z\cos(z)}$.

a) Le dénominateur s'annule si $z=0$ ou si

(7pts) $\cos(z) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) = 0,$

$$\Rightarrow e^{iz} = -e^{-iz},$$
$$\Rightarrow e^{i2z} = -1,$$
$$\Rightarrow i2z = \ln(-1) + i2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$
$$= i\pi + i2k\pi,$$
$$= i\pi(1+2k)$$
$$\Rightarrow z = \frac{\pi}{2}(1+2k) =: z_k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$z=0$ est une <u>singularité apparente</u> de f car

$$\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{\sin(z)}{z} \cdot \lim_{z\to 0} \frac{1}{\cos(z)},$$
$$\overset{RH}{=} \lim_{z\to 0} \frac{\cos(z)}{1} \cdot 1 = 1.$$

$z = z_k$ est un <u>pôle simple de f</u> car

$$\lim_{z\to z_k} (z-z_k) f(z) = \lim_{z\to z_k} \frac{\sin(z)}{z} \frac{(z-z_k)}{\cos(z)}$$
$$= \lim_{z\to z_k} \frac{\sin(z)}{z} \cdot \lim_{z\to z_k} \frac{z-z_k}{\cos(z)}$$

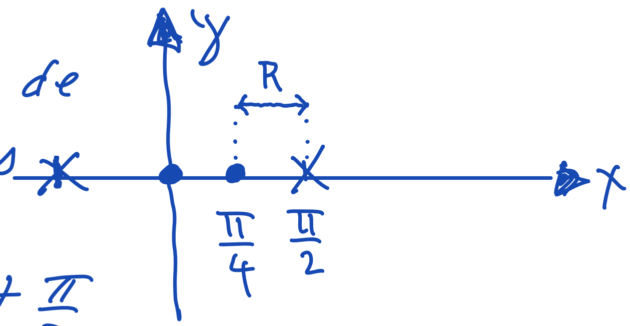
$$= \frac{\sin(z_K)}{z_K} \cdot \lim_{z \to z_K} \frac{1}{-\sin(z)} \qquad \text{(L'Hôpital)}$$

$$= \frac{\sin(z_K)}{z_K} \cdot \frac{(-1)}{\sin(z_K)}$$

$$= -\frac{1}{z_K} \neq 0, \text{ pour tout } K \in \mathbb{Z}.$$

Les singularités de f sont donc les $z_K = (2K+1)\frac{\pi}{2}$, $K \in \mathbb{Z}$, qui sont toutes des pôles simples.

b) (3pts) Les singularités de f les plus proches de $z = \frac{\pi}{4}$ sont $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$



La plus proche est $\frac{\pi}{2}$. Le rayon de convergence de la S.T. de f en $z_0 = \frac{\pi}{4}$ est donc

$$R = \left| \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right| = \frac{\pi}{4}.$$

Les singularités $-\pi/2$ et $\pi/2$ sont à égale distance de $z_0 = 0$, donc le rayon de convergence de la S.T. de f en $z_0 = 0$ est $R = \frac{\pi}{2}$.

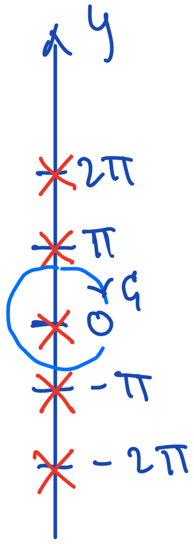
IV **10 pts**

a) **5 pts**

$$I := \int_{C:\ |z| = \frac{2021}{2022}\pi} \frac{dz}{e^{2z}-1}$$

La fonction $f(z) := \dfrac{1}{e^{2z}-1}$ est analytique partout dans $\mathbb{C}$ sauf pour les z tels que

$$e^{2z}-1=0 \Rightarrow e^{2z}=1$$
$$\Rightarrow 2z = \ln(1) + i2k\pi,\ k\in\mathbb{Z},$$
$$\Rightarrow z = ik\pi =: z_k.$$



C est un cercle centré en 0 de rayon $R = \frac{2021}{2022}\pi$. Comme $R<\pi$, La seule singularité à l'intérieur de C est donc $z=0$.

$z=0$ est un pôle simple car $\displaystyle\lim_{z\to 0} \frac{z}{e^{2z}-1} \overset{RH}{=} \lim_{z\to 0} \frac{1}{2e^{2z}} = \frac{1}{2} \neq 0.$

D'après le th. des résidus

$$I = 2\pi i \,\mathrm{Res}(f\,;\, z=0)$$

$$= 2\pi i \times \frac{1}{2} = \pi i .$$

b) 5 pts

$$I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2}$$

car $f(z) := \dfrac{1}{(1+z^2)^2}$ est paire.

f n'a aucune singularité réelle car

$1+z^2 \geqslant 1$ pour tout $z \in \mathbb{R}$.

Si $|z| \to \infty$, $f(z) \sim \dfrac{1}{z^4}$,

$\Rightarrow |f(z)| \leq \dfrac{2}{|z|^4}$ pour $|z|$ suffisamment grand,

donc la 2ième condition est satisfaite avec $M=2$ et $p=4 \geqslant 2$.

f est ana. partout dans $\mathbb{C}$ (fonction rationnelle) sauf en $z = \pm i$.

Seule $z=i$ satisfait $\mathrm{Im}(z) > 0$.

Les conditions du théorème sont vérifiées donc

$$I = \frac{1}{2} 2\pi i \, \mathrm{Res}\left(f ; z = i\right).$$

Or $f(z) = \dfrac{1}{(z+i)^2 (z-i)^2}$, donc

$z = i$ est un pôle double car

$$\lim_{z \to i} (z-i)^2 f(z) = \frac{1}{(z+i)^2}\bigg|_{z=i} = -\frac{1}{4} \neq 0$$

Donc $I = \pi i \lim\limits_{z \to i} \dfrac{d}{dz} \dfrac{1}{(z+i)^2}$,

$$= \pi i \; (-2)(z+i)^{-3}\Big|_{z=i} = -2\pi i \frac{1}{(2i)^3}$$

$$= \frac{\pi}{4}$$