



POLYTECHNIQUE
MONTREAL

Questionnaire Examen Intra

MTH2120

Sigle du cours

<i>Identification de l'étudiant(e)</i>				Réservé	
Nom :		Prénom :		1)	/10
Signature :		Matricule :	Groupe :	2)	/10
				3)	/10
				4)	/10
				/40	
<i>Sigle et titre du cours</i>					
MTH2120 - Analyse Appliquée					
<i>Professeur</i>		<i>Groupe</i>		<i>Trimestre</i>	
Antoine Saucier		1		A2022	
<i>Jour</i>	<i>Date</i>	<i>Durée</i>	<i>Heures</i>		
Dimanche	30 octobre 2022	2h	10h30-12h30		
<i>Documentation</i>		<i>Calculatrice</i>	<i>Outils électroniques</i>		
<input type="checkbox"/> Aucune <input type="checkbox"/> Toute <input checked="" type="checkbox"/> Voir directives particulières		<input type="checkbox"/> Aucune <input type="checkbox"/> Toutes <input checked="" type="checkbox"/> Voir directives particulières	Les appareils électroniques personnels sont interdits.		
<i>Directives particulières</i>					
<ul style="list-style-type: none"> Le professeur ne répondra à aucune question durant cet examen. Si vous estimez que vous ne pouvez pas répondre à une question pour diverses raisons, veuillez le justifier puis passer à la question suivante. Il est strictement interdit de débroucher l'examen. IMPORTANT : inscrire votre matricule sur toutes les pages numérotées. Un aide-mémoire se trouve à la dernière page du cahier. Une calculatrice non-programmable autorisée est permise. Rappel: la pondération de cet examen est 40%. 					
Cet examen contient <input type="text" value="4"/> questions sur un total de <input type="text" value="22"/> pages (incluant cette page).					

L'étudiant doit honorer l'engagement pris lors de la signature du code de conduite.

BROUILLON

Ne sera pas numérisé, ni corrigé

Justifiez et simplifiez vos réponses. Matricule:

Question 1 (10 points)

Les quatre questions suivantes sont indépendantes.

- a) (**2 pts**) Exprimer le nombre suivant sous la forme $a + ib$, où a et b sont réels:

$$(1 - i)^i.$$

- b) (**1 pt**) Exprimer le nombre suivant sous la forme $a + ib$, où a et b sont réels:

$$\ln(1 - \pi).$$

- c) (**3 pts**) Soit $z = x + iy$, où x et y sont réels. On définit la fonction f par

$$f(z) := \alpha x + i\beta y,$$

où α et β sont des constantes complexes. Trouver toutes les valeurs de α et β pour lesquelles f est entière. Dans ce cas, exprimer $f(z)$ en fonction de z .

- d) (**4 pts**) Trouver toutes les racines complexes z de l'équation

$$z^4 + z^3 + z - 1 = 0.$$

BROUILLON

Ne sera pas numérisé, ni corrigé

Justifiez et simplifiez vos réponses. Matricule:

BROUILLON

Ne sera pas numérisé, ni corrigé

Justifiez et simplifiez vos réponses. Matricule:

BROUILLON

Ne sera pas numérisé, ni corrigé

Justifiez et simplifiez vos réponses. Matricule:

BROUILLON

Ne sera pas numérisé, ni corrigé

Justifiez et simplifiez vos réponses. Matricule:

BROUILLON

Ne sera pas numérisé, ni corrigé

Justifiez et simplifiez vos réponses. Matricule:

Question 2 (10 points)

On considère la fonction

$$f(z) := \frac{1}{z(z-2)}.$$

a) (4 pts) Donner le développement en série de Laurent de f valide pour $0 < |z-2| < 2$, puis donner le résidu de f en $z=2$.

b) (3 pts) Évaluer

$$\oint_{|z-3|=1/2} f(z) dz,$$

où la courbe est parcourue dans le sens horaire, et justifier votre réponse.

c) (3 pts) Cette question est indépendante de a) et b) ci-dessus. Soit C le quart de cercle de rayon 1 centré en i parcouru de 0 à $1+i$. Évaluer

$$\int_C z \cos(z^2) dz$$

et exprimer votre réponse sous la forme $a+ib$, où a et b sont réels.

BROUILLON

Ne sera pas numérisé, ni corrigé

Justifiez et simplifiez vos réponses. Matricule:

BROUILLON

Ne sera pas numérisé, ni corrigé

Justifiez et simplifiez vos réponses. Matricule:

BROUILLON

Ne sera pas numérisé, ni corrigé

Justifiez et simplifiez vos réponses. Matricule:

BROUILLON

Ne sera pas numérisé, ni corrigé

Justifiez et simplifiez vos réponses. Matricule:

BROUILLON

Ne sera pas numérisé, ni corrigé

Justifiez et simplifiez vos réponses. Matricule:

Question 3 (10 points)

On considère la fonction f définie par

$$f(z) := \frac{\sin(z)}{z \cos(z)}.$$

- a) (7 pts) Déterminer la nature de toutes les singularités (c'est-à-dire: singularité apparente, singularité essentielle, pôle d'ordre à préciser ...) de f .
- b) (3 pts) Donner le rayon de convergence de la série de Taylor de f en $z_0 = \pi/4$, puis en $z_0 = 0$.

BROUILLON

Ne sera pas numérisé, ni corrigé

Justifiez et simplifiez vos réponses. Matricule:

BROUILLON

Ne sera pas numérisé, ni corrigé

Justifiez et simplifiez vos réponses. Matricule:

BROUILLON

Ne sera pas numérisé, ni corrigé

Justifiez et simplifiez vos réponses. Matricule:

BROUILLON

Ne sera pas numérisé, ni corrigé

Justifiez et simplifiez vos réponses. Matricule:

BROUILLON

Ne sera pas numérisé, ni corrigé

Justifiez et simplifiez vos réponses. Matricule:

Question 4 (10 points)

a) (5 pts) Évaluer

$$\oint_{|z|=\frac{2022}{2023}\pi} \frac{dz}{e^{2z} - 1}$$

où la courbe est parcourue dans le sens horaire. Justifier chaque étape de votre démarche.

b) (5 pts) Évaluer

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2}$$

en justifiant chaque étape de votre démarche.

BROUILLON

Ne sera pas numérisé, ni corrigé

Justifiez et simplifiez vos réponses. Matricule:

BROUILLON

Ne sera pas numérisé, ni corrigé

Justifiez et simplifiez vos réponses. Matricule:

BROUILLON

Ne sera pas numérisé, ni corrigé

Justifiez et simplifiez vos réponses. Matricule:

BROUILLON

Ne sera pas numérisé, ni corrigé

Justifiez et simplifiez vos réponses. Matricule:

BROUILLON

Ne sera pas numérisé, ni corrigé

AIDE MÉMOIRE

Conditions de Cauchy-Riemann : $u_x = v_y, u_y = -v_x$.

Première formule de Cauchy : $f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(z)}{z-a} dz$.

Seconde formule de Cauchy : $f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \oint \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz$.

Pôle simple en $z = a$: $\text{Res}(f(z); z = a) = \lim_{z \rightarrow a} ((z-a) f(z))$.

Pôle double en $z = a$: $\text{Res}(f(z); z = a) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{d}{dz} ((z-a)^2 f(z))$.

Pôle d'ordre n en $z = a$: $\text{Res}(f(z); z = a) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} ((z-a)^n f(z))$.

BROUILLON

Ne sera pas numérisé, ni corrigé