FINAL MTH2120 - A2021 - SOLUTIONS

(A.S.)

I

10 pts

$$I = \int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+a^2)^3}$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)^3}$$

car la fonction $f(z) := \dfrac{1}{(z^2+a^2)^3}$ est paire. (1)

f est ana. partout dans $\mathbb{C}$ sauf en $z = \pm ia$,

donc f n'a aucune singularité réelle. (2)

On a

$$f(z) = \frac{1}{(z+ia)^3(z-ia)^3}$$

donc $z_\pm := \pm ia$ sont des pôles triples.

On voit que $|f(z)| \sim \dfrac{1}{|z|^6}$ quand $|z| \to \infty$,

donc $|f(z)| \leqslant \dfrac{2}{|z|^6}$ pour $|z|$ suffisamment grand.

On a donc $|f(z)| \leqslant \dfrac{M}{|z|^p}$, $|z| \gg 1$, (3)

avec $M = 2$ et $p = 6 \geqslant 2$.

D'après (1), (2) et (3), le théorème vu en classe s'applique et donc

$$I = \frac{1}{2} \cdot 2\pi i \sum_{\substack{z_k: \\ \mathrm{Im}(z_k)>0}} \mathrm{Res}(f\,;\, z=z_k).$$

Seule la singularité z_+ satisfait $\mathrm{Im}(z_+)>0$ car $\mathrm{Im}(z_+) = \mathrm{Im}(ia) = a > 0$, donc

$$I = \pi i \, \mathrm{Res}(f\,;\, z=ia),$$

$$= \pi i \lim_{z \to ia} \frac{1}{2} \frac{d^2}{dz^2}\left((z-ia)^3 f(z)\right),$$

car z_+ est un pôle triple,

$$= \frac{\pi i}{2} \frac{d^2}{dz^2}\left[\frac{1}{(z+ia)^3}\right]\Bigg|_{z=ia}$$

$$= \frac{\pi i}{2}(-3)(-4)(z+ia)^{-5}\Big|_{z=ia},$$

$$= \frac{6\pi i}{(2ia)^5} = \frac{2\times 3\,\pi\, i}{2^5\,(i^2)^2\, i\, a^5}$$

$$= \frac{3\pi}{16\,a^5}.$$

✓ = 1 point

/ = ½ point

II (10 pts)

a) (5 pts) $f(n) = u(n-1)$, $g(n) = n\,u(n)$.

$$(f*g)(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(k-1)(n-k)\,u(n-k).$$

$u(k-1) = 1$ ssi $k-1 \geq 0 \iff k \geq 1$.

$u(n-k) = 1$ ssi $n-k \geq 0 \iff k \leq n$.

L'argument de la somme est non-nul si $1 \leq k \leq n$, donc la somme est nulle si $n \leq 0$.

Si $n \geq 1$, on a

$$(f*g)(n) = \sum_{k=1}^{n} (n-k) = n\sum_{k=1}^{n} 1 - \sum_{k=1}^{n} k,$$

$$= n \cdot n - \frac{n}{2} \cdot (n+1),$$

$$= \frac{1}{2}(n^2 - n).$$

Donc $\boxed{(f*g)(n) = \frac{1}{2}(n^2-n)\,u(n-2).}$

$u(n-1)$ est aussi correct.

b) 5 pts

$$u(t) * u(t-a)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} u(\theta)\, u(t-\theta-a)\, d\theta$$

$$= \int_{0}^{\infty} u(t-\theta-a)\, d\theta$$

$$x = t-\theta-a$$

$$= \int_{t-a}^{-\infty} u(x)\,(-dx)$$

$$= \int_{-\infty}^{t-a} u(x)\, dx$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } t-a < 0, \\ \underbrace{\int_{0}^{t-a} dx}_{= t-a} & \text{si } t-a \geq 0 \end{cases}$$

$= t-a$, donc

$$\boxed{u(t) * u(t-a) = (t-a)\, u(t-a).}$$

III 8 pts

$$2y(n+2) - 3y(n+1) + 2y(n) = x(n+1) - x(n), \quad n \geq 0,$$

$$y(0) = y(1) = x(0) = 0.$$

a) 4 pts

La T-z donne

$$(2z^2 - 3z + 2)\, Y(z) = (z-1)\, X(z),$$

d'où

$$\boxed{H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z-1}{2z^2-3z+2}.}$$

or $2z^2-3z+2=0 \Rightarrow z = \frac{1}{4}\left(3 \pm \sqrt{9-16}\right)$

$$= \frac{3}{4} \pm i\frac{\sqrt{7}}{4} =: z_\pm .$$

donc pas de simplification.

4 Pts

b) $h(n) = Z^{-1}(H(z))$

$$= \frac{1}{2\pi i} \oint_c \underbrace{\frac{(z-1)}{(z-z_+)(z-z_-)} z^{n-1}}_{G(z)} dz$$

si $n \geq 1$,

G a deux singularités en z_+ et en z_-, qui sont des pôles simples, donc

$$h(n) = \mathrm{Res}\left(G(z) ; z=z_+\right) + \mathrm{Res}\left(G(z) ; z=z_-\right)$$

$$= \left.\frac{(z-1)\, z^{n-1}}{z-z_-}\right|_{z=z_+} + \left.\frac{(z-1)\, z^{n-1}}{z-z_+}\right|_{z=z_-}$$

$$\boxed{h(n) = \frac{1}{(z_+-z_-)}\left[(z_+-1)(z_+)^{n-1} - (z_- - 1)(z_-)^{n-1}\right].}$$

$$h(0) = \lim_{|z| \to \infty} H(z) = 0$$

Remarque : le $h(n)$ ne se simplifi pas facilement.

IV 10 pts

a) 4 pts $f(t)\,\delta(t-a) \overset{d}{=} f(a).\,\delta(t-a)$?

Soit φ une fonction test. Il faut comparer

$$A := \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\delta(t-a)\,\varphi(t)\,dt = f(t)\,\varphi(t)\Big|_{t=a},$$
$$= f(a)\,\varphi(a),$$

avec

$$B := \int_{-\infty}^{\infty} f(a)\,\delta(t-a)\,\varphi(t)\,dt = f(a)\,\varphi(t)\Big|_{t=a},$$
$$= f(a)\,\varphi(a).$$

Comme $A = B$ pour tout $\varphi \in \mathcal{D}$, les deux distributions sont égales.

b) 6 pts $F(s) = \dfrac{1}{s\,(s^2+a^2)}$.

Ici $F(s) \to 0$ si $|s| \to \infty$, donc le théorème d'inversion de la TL. s'applique :

$F(s)$ est ana. partout dans $\mathbb{C}$

sauf en $s = 0$ et $s = \pm ia$,

qui sont des singularités de type pôle simple.

$$f(t) = \mathrm{Res}\left(e^{st}F(s)\,;\, s=0\right) + \mathrm{Res}\left(e^{st}F(s)\,;\, s=ia\right) + \mathrm{Res}\left(e^{st}F(s)\,;\, s=-ia\right),$$

$$= \left.\frac{e^{st}}{s^2+a^2}\right|_{s=0} + \left.\frac{e^{st}}{s(s+ia)}\right|_{s=ia} + \left.\frac{e^{st}}{s(s-ia)}\right|_{s=-ia},$$

$$= \frac{1}{a^2} + \frac{e^{iat}}{ia(2ia)} + \frac{e^{-iat}}{(-ia)(-2ia)},$$

$$= \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^2}\,\frac{-e^{iat} - e^{-iat}}{2} = \frac{1}{a^2} - \frac{1}{a^2}\cos(at)$$

$$\Rightarrow \boxed{f(t) = \frac{1}{a^2}\left(1 - \cos(at)\right)}.$$

V 10pts

La solution de $y_H'' + \omega^2 y_H = 0$ est $y_H(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$ où A et φ sont des C^{tes} réelles. On a $F(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{int}$

donc on cherche une solution particulière y_p sous la forme (méthode des coefficients indéterminés)

$$y_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{int}, \quad (1)$$

où les C_n sont des coefficients à déterminer.

On remplace (1) dans $y'' + \omega^2 y = \sum_n a_n e^{int}$:

$$\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{int}\right)'' + \omega^2\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{int}\right) = \sum_n a_n e^{int},$$

$$\Rightarrow \sum_n \left(C_n (in)^2 + \omega^2 C_n\right) e^{int} = \sum_n a_n e^{int},$$

$$\Rightarrow C_n\left(\omega^2 - n^2\right) = a_n \quad \text{(égalité de deux SF)}$$

$$\Rightarrow C_n = a_n / \left(\omega^2 - n^2\right),$$

où $\omega \neq n$ par hypothèse car $\omega \notin \mathbb{N}$.

La solution générale est donc

$$\boxed{\begin{aligned} y(t) &= y_H(t) + y_P(t), \\ &= A\cos(\omega t + \varphi) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{a_n}{\omega^2 - n^2} e^{int}. \end{aligned}}$$

VI 12 pts

a) 4 pts

$$\mathcal{F}\left(e^{-a|x|}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|x|} e^{-iwx} \, dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} 2 \int_0^{\infty} e^{-ax} \cos(wx) \, dx$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \, Re\left(\int_0^{\infty} e^{-ax} e^{iwx} \, dx \right)$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \, Re\left(\int_0^{\infty} e^{(-a+iw)x} \, dx \right)$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \, Re\left(\left. \frac{e^{(-a+iw)x}}{-a+iw} \right|_0^{\infty} \right)$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \, Re\left(0 - \frac{1}{-a+iw} \right) \text{ car } a > 0,$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \, Re\left(\frac{1}{a-iw} \right)$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \, Re\left(\frac{a+iw}{a^2+w^2} \right)$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{a^2+w^2}.$$

b) D'après le th. de Fourier,

4 pts

$$e^{-a|x|} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{a}{a^2+w^2}\,\underbrace{e^{iwx}}_{=\cos(wx)+i\sin(wx)}\,dw$$

$$= \frac{a}{\pi}\cdot 2\int_0^{\infty}\frac{\cos(wx)}{a^2+w^2}\,dw \text{, d'où}$$

car $\frac{a}{a^2+w^2}\sin(wx)$ est impaire

$$\boxed{\int_0^{\infty}\frac{\cos(wx)}{a^2+w^2}\,dw = \frac{\pi}{2a}\,e^{-a|x|}.}$$

4 pts

c) D'après l'identité de Parseval,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{a}{a+w^2}\right)^2 dw = \int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{-a|x|}\right)^2 dx$$

$$\Rightarrow \frac{\cancel{2}a^2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dw}{(a^2+w^2)^2}\,dw = \cancel{2}\int_0^{\infty}e^{-2ax}\,dx$$

$$\Rightarrow 2\int_0^{\infty}\frac{dw}{(a^2+w^2)^2} = \frac{\pi}{a^2}\left(\frac{e^{-2a}}{(-2a)}\Big|_0^{\infty}\right)$$

$$\Rightarrow 2\int_0^\infty \frac{d\omega}{(a^2+\omega^2)^2} = -\frac{\pi}{2a^3}(0-1),$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_0^\infty \frac{d\omega}{(a^2+\omega^2)^2} = \frac{\pi}{4a^3}.}$$