POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

Questionnaire
Examen final

MTH2120

Sigle du cours

Identification de l'étudiant(e)			Réservé
Nom :	Prénom :		1) /10
Signature :	Matricule :	Groupe :	2) /10

Sigle et titre du cours				
MTH2120 - Analyse appliquée				3) /8
Professeur		**Groupe**	**Trimestre**	4) /10
Antoine Saucier		1	A2021	5) /10
Jour	**Date**	**Durée**	**Heures**	6) /12
Samedi	18 décembre 2021	2h30	13h30-16h	

Documentation	Calculatrice	Outils électroniques
☐ Aucune ☐ Toute ☒ Voir directives particulières	☐ Aucune ☐ Toutes ☒ Voir directives particulières	Les appareils électroniques personnels sont interdits.

Directives particulières

- **Le professeur ne répondra à aucune question durant cet examen. Si vous estimez que vous ne pouvez pas répondre à une question pour diverses raisons, veuillez le justifier puis passer à la question suivante.**
- **Il est strictement interdit de débrocher l'examen.**
- **IMPORTANT : inscrire votre matricule sur toutes les pages numérotées.**
- **Un aide-mémoire se trouve dans les deux dernières pages du cahier.**
- **Une calculatrice non-programmable autorisée est permise.**
- **Rappel: la pondération de cet examen est 50%.**

Cet examen contient **6** questions sur un total de **32** pages **(incluant cette page).**

L'étudiant doit honorer l'engagement pris lors de la signature du code de conduite.

BROUILLON

Ne sera pas numérisé, ni corrigé

Justifiez vos réponses. Matricule:

Question 1 (10 points)

Évaluer

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+a^2)^3},$$

où $a > 0$ est un paramètre et *justifier chaque étape de votre démarche.*

BROUILLON

Ne sera pas numérisé, ni corrigé

Justifiez vos réponses. Matricule:

BROUILLON

Ne sera pas numérisé, ni corrigé

Justifiez vos réponses. Matricule:

BROUILLON

Ne sera pas numérisé, ni corrigé

Justifiez vos réponses. Matricule:

BROUILLON

Ne sera pas numérisé, ni corrigé

Justifiez vos réponses. Matricule:

Question 2 (10 points)

a) (5 points) Soient deux suites $f(n) = u(n-1)$ et $g(n) = n\ u(n)$ définies pour tout $n \in \mathbb{Z}$, où u désigne la fonction échelon. Évaluer le produit de convolution $(f * g)(n)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

b) (5 points) Soient deux fonctions $f(t) = u(t)$ et $g(t) = u(t-a)$ définies pour tout $t \in \mathbb{R}$, où $a \in \mathbb{R}$ est une constante et u désigne la fonction échelon. Évaluer le produit de convolution $(f * g)(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Indication: La fonction échelon u est définie par

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad t \geq 0, \\ 0 & \text{si} \quad t < 0. \end{cases}$$

BROUILLON

Ne sera pas numérisé, ni corrigé

Justifiez vos réponses. Matricule:

BROUILLON

Ne sera pas numérisé, ni corrigé

Justifiez vos réponses. Matricule:

BROUILLON

Ne sera pas numérisé, ni corrigé

Justifiez vos réponses. Matricule:

BROUILLON

Ne sera pas numérisé, ni corrigé

Justifiez vos réponses. Matricule:

BROUILLON

Ne sera pas numérisé, ni corrigé

Justifiez vos réponses. Matricule:

Question 3 (8 points)

On considère un système linéaire en temps discret modélisé par l'équation

$$2\,y(n+2) - 3\,y(n+1) + 2\,y(n) = x(n+1) - x(n), \;\; n \geq 0,$$

avec les valeurs initiales $y(0) = y(1) = x(0) = 0$.

a) (4 points) Déterminer la fonction de transfert $H(z)$ du système.

b) (4 points) Déterminer la réponse impulsionnelle $h(n)$ du système pour tout $n \geq 0$.

BROUILLON

Ne sera pas numérisé, ni corrigé

Justifiez vos réponses. Matricule:

BROUILLON

Ne sera pas numérisé, ni corrigé

Justifiez vos réponses. Matricule:

BROUILLON

Ne sera pas numérisé, ni corrigé

Justifiez vos réponses. Matricule:

BROUILLON

Ne sera pas numérisé, ni corrigé

Justifiez vos réponses. Matricule:

BROUILLON

Ne sera pas numérisé, ni corrigé

Justifiez vos réponses. Matricule:

Question 4 (10 points)

a) (4 points) Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $a \in \mathbb{R}$ une constante. Les distributions

$$f(t)\,\delta(t-a) \quad \text{et} \quad f(a)\,\delta(t-a),$$

sont-elles égales au sens des distributions? Justifier votre réponse.

b) (6 points) La transformée de Laplace $F(s)$ d'une fonction $f(t)$ est

$$F(s) = \frac{1}{s\,(s^2+a^2)},$$

où $a \neq 0$ est une constante réelle.

On demande de calculer $f(t)$ en utilisant un calcul de résidus. Justifier chaque étape de votre démarche.

BROUILLON

Ne sera pas numérisé, ni corrigé

Justifiez vos réponses. Matricule:

BROUILLON

Ne sera pas numérisé, ni corrigé

Justifiez vos réponses. Matricule:

BROUILLON

Ne sera pas numérisé, ni corrigé

Justifiez vos réponses. Matricule:

BROUILLON

Ne sera pas numérisé, ni corrigé

Justifiez vos réponses. Matricule:

BROUILLON

Ne sera pas numérisé, ni corrigé

Justifiez vos réponses. Matricule:

Question 5 (10 points)

On applique une force périodique à un système masse-ressort. La position $y(t) \in \mathbb{R}$ de la masse au temps t satisfait l'équation différentielle

$$y'' + \omega^2\, y = F(t),\ t > 0, \tag{1}$$

où $\omega > 0$ est une constante non-entière. La force $F(t)$ est une onde périodique de période 2π donnée par la série

$$F(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n\, e^{i\,n\,t},$$

où les $a_n \in \mathbb{C}$ sont des paramètres constants.

On demande de trouver la solution générale de l'équation différentielle (1).

BROUILLON

Ne sera pas numérisé, ni corrigé

Justifiez vos réponses. Matricule:

BROUILLON

Ne sera pas numérisé, ni corrigé

Justifiez vos réponses. Matricule:

BROUILLON

Ne sera pas numérisé, ni corrigé

Justifiez vos réponses. Matricule:

BROUILLON

Ne sera pas numérisé, ni corrigé

Justifiez vos réponses. Matricule:

BROUILLON

Ne sera pas numérisé, ni corrigé

Justifiez vos réponses. Matricule:

Question 6 (12 points)

On considère la fonction

$$f(x) = e^{-a\,|x|},\ \ x \in \mathbb{R},$$

où $a > 0$ est un paramètre constant.

a) (4 points) Montrer que la transformée de Fourier de la fonction f est

$$\hat{f}(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \frac{a}{a^2 + \omega^2}\ .$$

b) (4 points) Évaluer l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{\cos(\omega\, x)}{a^2 + \omega^2}\, d\omega$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$, où $a > 0$ est un paramètre constant.

c) (4 points) Évaluer l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{d\omega}{(a^2 + \omega^2)^2}\ ,$$

où $a > 0$ est un paramètre constant.

BROUILLON

Ne sera pas numérisé, ni corrigé

Justifiez vos réponses. Matricule:

BROUILLON

Ne sera pas numérisé, ni corrigé

Justifiez vos réponses. Matricule:

BROUILLON

Ne sera pas numérisé, ni corrigé

Justifiez vos réponses. Matricule:

BROUILLON

Ne sera pas numérisé, ni corrigé

Justifiez vos réponses. Matricule:

BROUILLON

Ne sera pas numérisé, ni corrigé

AIDE MÉMOIRE

$$\text{Pôle simple : } \operatorname{Res}(f(z); z=a) = \lim_{z\to a}((z-a)\,f(z)).$$

$$\text{Pôle double : } \operatorname{Res}(f(z); z=a) = \lim_{z\to a}\frac{d}{dz}\left((z-a)^2\,f(z)\right).$$

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)\,z^{-n}, \quad f(n) = \frac{1}{2\pi i}\int_C F(z)\,z^{n-1}\,dz.$$

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\,dt, \quad f(t) = \sum_k \operatorname{Res}\left(e^{st}F(s); s=s_k\right) \text{ si } \lim_{|s|\to\infty} F(s) = 0.$$

$$Z((f_1 * f_2)(n)) = F_1(z)\,F_2(z).$$

$$L(f(t)*g(t)) = F(s)\,G(s), \quad F(f(t)*g(t)) = \sqrt{2\pi}\,\hat{f}(\omega)\,\hat{g}(\omega).$$

$$\text{Général: } (x*y)(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\,y(n-k).$$

$$\text{Transformée en z : } (x*y)(n) = \sum_{k=0}^{n} x(k)\,y(n-k).$$

$$\text{Général: } (f*g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\theta)\,g(t-\theta)\,d\theta.$$

$$\text{Transformée de Laplace: } (f*g)(t) = \int_0^t f(\theta)\,g(t-\theta)\,d\theta.$$

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t)\,dt, \quad f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\,\hat{f}(\omega)\,d\omega.$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos(n\pi x/L) + b_n\sin(n\pi x/L)\right)$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,\cos(n\pi x/L)\,dx,\ n\ge 0. \quad b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,\sin(n\pi x/L)\,dx,\ n\ge 1.$$

$$\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}|f(t)|^2\,dt = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right)$$

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\,e^{in\pi x/L}, \quad c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\,e^{-in\pi x/L}\,dx.$$

$$\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}|f(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|^2$$

BROUILLON

Ne sera pas numérisé, ni corrigé

Transformées de Laplace élémentaires

$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$	Notes
1. 1	$\frac{1}{s}, \quad s > 0$	Sec. 6.1 ; Ex. 4
2. e^{at}	$\frac{1}{s-a}, \quad s > a$	Sec. 6.1 ; Ex. 5
3. t^n; $\quad n =$ entier positif	$\frac{n!}{s^{n+1}}, \quad s > 0$	Sec. 6.1 ; Prob. 27
4. $t^p,\ p > -1$	$\frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}, \quad s > 0$	Sec. 6.1 ; Prob. 27
5. $\sin at$	$\frac{a}{s^2+a^2}, \quad s > 0$	Sec. 6.1 ; Ex. 6
6. $\cos at$	$\frac{s}{s^2+a^2}, \quad s > 0$	Sec. 6.1 ; Prob. 6
7. $\sinh at$	$\frac{a}{s^2-a^2}, \quad s > \lvert a \rvert$	Sec. 6.1 ; Prob. 8
8. $\cosh at$	$\frac{s}{s^2-a^2}, \quad s > \lvert a \rvert$	Sec. 6.1 ; Prob. 7
9. $e^{at} \sin bt$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2}, \quad s > a$	Sec. 6.1 ; Prob. 13
10. $e^{at} \cos bt$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}, \quad s > a$	Sec. 6.1 ; Prob. 14
11. $t^n e^{at},\ n =$ entier positif	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}, \quad s > a$	Sec. 6.1 ; Prob. 18
12. $u_c(t)$	$\frac{e^{-cs}}{s}, \quad s > 0$	Sec. 6.3
13. $u_c(t) f(t-c)$	$e^{-cs} F(s)$	Sec. 6.3
14. $e^{ct} f(t)$	$F(s-c)$	Sec. 6.3
15. $f(ct)$	$\frac{1}{c} F\left(\frac{s}{c}\right), \quad c > 0$	Sec. 6.3 ; Prob. 19
16. $\int_0^t f(t-\tau) g(\tau)\, d\tau$	$F(s)G(s)$	Sec. 6.6
17. $\delta(t-c)$	e^{-cs}	Sec. 6.5
18. $f^{(n)}(t)$	$s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$	Sec. 6.2
19. $(-t)^n f(t)$	$F^{(n)}(s)$	Sec. 6.2 ; Prob. 28

BROUILLON

Ne sera pas numérisé, ni corrigé