Justifiez et simplifiez vos réponses. Matricule:

Question 1 (10 points)

Les trois questions suivantes sont indépendantes.

a) (**4 pts**) Trouver toutes les racines complexes $z \in \mathbb{C}$ de l'équation

$$\cosh(z) = 0.$$

b) (**3 pts**) La fonction

$$f(z) = \operatorname{Re}(z)$$

est-elle analytique dans une région du plan complexe? Justifier votre réponse.

c) (**3 pts**) Évaluer

$$\oint_{|z|=1} z^5 \sin\left(\frac{1}{z^2}\right) dz,$$

où la courbe est parcourue dans les sens anti-horaire.

MTH2120 – INTRA – A2024 (A.S.)

I 10 pts

a 4 pts $\cosh(z) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}(e^{z} + e^{-z}) = 0,$

$\Rightarrow e^{z} = -e^{-z} \Rightarrow e^{2z} = -1,$

$\Rightarrow 2z = \ln(-1) + i\,2k\pi,\ k \in \mathbb{Z},$

$= \cancel{\ln(|-1|)} + i\pi + i\,2k\pi,$

$= (2k+1)\,i\pi$

$\Rightarrow z = (2k+1)\frac{\pi}{2}\,i,\ k \in \mathbb{Z}.$

b 3 pts $f(z) = \operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(x+iy) = x,$

donc $u = x$ et $v = 0.$

$u_x - v_y = \frac{\partial x}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}0 = 1 \neq 0$

Une des CCR n'est pas satisfaite, donc f n'est pas ana.

(c) 3 pts

$$I = \oint_{C} z^5 \sin\left(\frac{1}{z^2}\right) dz$$

$C: |z| = 1$

$$= \oint_C z^5 \left(\frac{1}{z^2} - \frac{1}{3!}\left(\frac{1}{z^2}\right)^3 + \frac{1}{5!}\left(\frac{1}{z^2}\right)^5 - \cdots \right) dz$$

$$= \oint_C \left(z^3 - \frac{1}{3!}\frac{1}{z} + \frac{1}{5!}\frac{1}{z^5} - \cdots \right) dz$$

$$= \cancel{2}\pi i \left(-\frac{1}{3 \times \cancel{2}} \right)$$

$$= -\frac{\pi}{3} i .$$

Justifiez et simplifiez vos réponses. Matricule:

Question 2 (11 points)

Les trois questions suivantes sont indépendantes.

a) (**5 pts**) En utilisant la définition

$$e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad \text{pour } z \in \mathbb{C},$$

montrer que si $\theta \in \mathbb{R}$, alors

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\,\sin(\theta).$$

b) (**2 pts**) Montrer que

$$|e^z| \leq e^{|z|}$$

pour tout $z \in \mathbb{C}$.

c) (**4 pts**) Donner le développement en série de Laurent de la fonction

$$f(z) = \frac{1}{1-z^2}$$

valide pour $|z-1| > 2$.

II 11 pts

a 5 pts

$$e^{i\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^n}{n!},$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i^2)^n \theta^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} (i^2)^n i \frac{\theta^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

$$= \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \theta^{2n}}{(2n)!}}_{= \cos(\theta)} + i \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \theta^{2n+1}}{(2n+1)!}}_{= \sin(\theta)},$$

(b) **2 pts** Montrer que $|e^z| \leqslant e^{|z|}$

$$|e^z| = |e^{x+iy}| = |e^x \cdot e^{iy}|,$$

$$= e^x \leqslant e^{|x|}$$ car e est croissante et $|x| \geqslant x$,

$$\leqslant e^{\sqrt{x^2+y^2}}$$ car $\sqrt{x^2+y^2} \geqslant \sqrt{x^2}$ et e est croissante.

__Autre preuve__ :

$$|e^z| = \left| 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots \right|$$

$$\leqslant 1 + |z| + \frac{1}{2!}|z|^2 + \frac{1}{3!}|z|^3 + \cdots = e^{|z|}$$

d'après l'inégalité du triangle

(c) 4 pts $\quad f(z) = \dfrac{1}{1-z^2}, \quad |z-1| > 2.$

$$|z-1| > 2 \Rightarrow \left| \pm \frac{2}{z-1} \right| < 1$$

$$f(z) = \frac{1}{(1+z)(1-z)} = -\frac{1}{(z-1)} \frac{1}{(1+z)}$$

$$= -\frac{1}{(z-1)} \frac{1}{(z-1+2)}$$

$$= -\frac{1}{(z-1)} \frac{1}{(z-1)\left(1 - \frac{(-2)}{z-1}\right)}$$

$$= -\frac{1}{(z-1)^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-2)}{(z-1)} \right)^n \text{ on } \left| \frac{-2}{z-1} \right| < 1$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^n}{(z-1)^{n+2}}$$

Justifiez et simplifiez vos réponses. Matricule:

Question 3 (8 points)

On considère la fonction f définie par

$$f(z) = \frac{1 - \cos(z)}{\sin(z)},$$

où $z \in \mathbb{C}$.

Déterminer la nature de toutes les singularités de f (c'est-à-dire: singularité apparente, singularité essentielle, pôle d'ordre à préciser ...), et évaluer les résidus de toutes les singularités.

III 8 pts $f(z) = \dfrac{1-\cos(z)}{\sin(z)}$

f est une multiplication / division de fonctions entières, donc elle est ana. partout où elle n'a pas de singularités.

Le dénom. s'annule pour $z = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
Le numérateur peut aussi s'annuler. Examinons la limite

$$L := \lim_{z \to k\pi} f(z) = \lim_{z \to k\pi} \frac{1-\cos(z)}{\sin(z)}.$$

Si k est pair, $1-\cos(k\pi) = 1-(-1)^k = 0$, on a une forme indéterminée "0/0", alors

$$L = \lim_{z \to k\pi} \frac{\sin(z)}{\cos(z)} = 0,$$

et donc les $z_k = k\pi$ avec k pair sont des <u>singularités apparentes</u>.

Si k est impair, $1-\cos(k\pi) = 1-(-1)^k = 2$,
donc

$$f(z) \sim \frac{2}{\sin(k\pi) + \cos(k\pi)(z-k\pi)}, \quad z \to k\pi,$$

$$\sim \frac{2}{-(z-k\pi)}, \quad z \to k\pi,$$

et donc z_k est un pôle simple.
Le résidu est :

$$\mathrm{Res}(f; z=k\pi, k \text{ impair})$$

$$= \lim_{z\to k\pi} (z-k\pi) \frac{(1-\cos(z))}{\sin(z)}$$

$$= \left(\lim_{z\to k\pi} 1-\cos(z)\right) \cdot \left(\lim_{z\to k\pi} \frac{z-k\pi}{\sin(z)}\right)$$

$$\overset{R.H.}{=} 2 \lim_{z\to k\pi} \frac{1}{\cos(z)} = 2(-1)^k.$$

$$= -2 \text{ car } k \text{ est } \underline{\text{impair}}.$$

Justifiez et simplifiez vos réponses. Matricule:

Question 4 (11 points)

Les deux questions suivantes sont indépendantes.

a) (**6 pts**) Évaluer

$$\oint_{|z-i|=2} \overline{z}\ dz,$$

où la courbe est parcourue dans le sens horaire, et exprimer votre réponse sous la forme $a + i\, b$, où a et b sont réels. Justifier votre démarche.

b) (**5 pts**) Évaluer

$$\oint_{|z-3|=1} \frac{dz}{\sin(z)},$$

où la courbe est parcourue dans le sens horaire, et exprimer votre réponse sous la forme $a + i\, b$, où a et b sont réels. Justifier votre démarche.

IV 11 pts

a 6 pts

$$I := \oint_C \bar{z}\, dz$$

$$C : |z-i| = 2$$

$\bar{z}$ n'est pas ana., il faut paramétriser.

$$z(\theta) = i + 2e^{i\theta}, \quad -\pi < \theta \leqslant \pi.$$

$$z'(\theta) = 2i\, e^{i\theta}$$

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} \left(i + 2e^{i\theta}\right)^* 2i\, e^{i\theta}\, d\theta,$$

$$= 2i \int_{-\pi}^{\pi} \left(-i + 2e^{-i\theta}\right) e^{i\theta}\, d\theta,$$

$$= 2 \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\theta}\, d\theta + 4i \int_{-\pi}^{\pi} d\theta,$$

$$= 2\, \frac{e^{i\theta}}{i} \Big|_{-\pi}^{\pi} + 4i \left(\theta \Big|_{-\pi}^{\pi}\right)$$

$$= -2i\left[e^{i\pi} - e^{-i\pi}\right] + 4i \cdot 2\pi$$

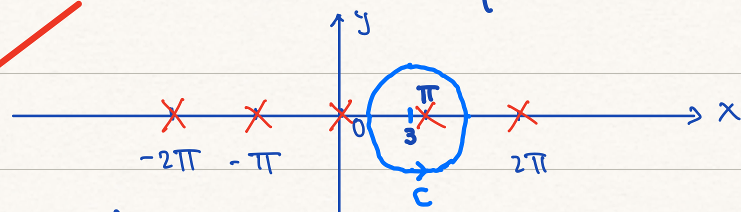
$$= 8\pi i.$$

(b) 5 pts

$$I = \oint_{C : |z-3| = 1} \frac{dz}{\sin(z)}$$

$f(z) := \dfrac{1}{\sin(z)}$ est ana. partout dans $\mathbb{C}$

sauf pour les $z_k = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, qui annulent $\sin(z)$.



Seule $z_1 = \pi$ est à l'intérieur de C.

D'après le th. des résidus,

$$I = 2\pi i \operatorname{Res}(f ; z = \pi).$$

Or $\displaystyle\lim_{z \to 0} (z - \pi) f(z) = \lim_{z \to \pi} \frac{z - \pi}{\sin(z)}$

$\displaystyle\overset{R.H.}{=} \lim_{z \to \pi} \frac{1}{\cos(z)} = -1 \neq 0,$

donc $z = \pi$ est un pôle simple et $\operatorname{Res}(f ; z = \pi) = -1$, d'où

$$I = 2\pi i \times (-1) = -2\pi i.$$