Question 1 [10 points]

Les trois questions suivantes sont indépendantes.

a) Exprimez le nombre suivant sous la forme $a + i\,b$ avec $a,\, b \in \mathbb{R}$:

$$(1-i)^{3\,i}.$$

b) L'identité

$$\ln\left(z^{\alpha}\right) = \alpha \ln(z)$$

est-elle vraie pour tous nombres complexes z et α? Si oui, démontrez-le. Sinon, donnez un contrexemple. Le symbole ln( ) désigne la branche principale du logarithme.

c) Trouvez toutes les solutions complexes de l'équation suivante et exprimez votre réponse sous la forme $a + i\,b$ avec $a,\, b \in \mathbb{R}$:

$$\cos(2z) = i.$$

Réponse:

a) **(2 pts)** On a

$$\begin{aligned}
(1-i)^{3i} &= \exp\left(3i\ln(1-i)\right) \\
&= \exp\left(3i\left(\ln(\sqrt{2}) - \frac{\pi}{4}\,i\right)\right) \\
&= \exp\left(\frac{3\pi}{4} + 3\,i\ln\sqrt{2}\right) \\
&= e^{3\pi/4}\cos(3\ln(\sqrt{2}) + i\,e^{3\pi/4}\sin(3\ln(\sqrt{2})).
\end{aligned}$$

b) **(2 pts)** L'identité est fausse en général. Par exemple, si $z = i$ et $\alpha = 4$ alors $\ln\left(i^4\right) = \ln(1) = 0$ et $4\ln(i) = 4(\ln(1) + i\frac{\pi}{2}) = 2i\pi$, donc $\ln(i^4) \neq 4\ln(i)$.

c) **(6 pts)** On a

$$\begin{aligned}
\cos(2z) = i \quad &\Rightarrow \quad \frac{e^{2iz} + e^{-2iz}}{2} = i \\
&\Rightarrow \quad e^{-2iz}(e^{4iz} + 1) = 2i \\
&\Rightarrow \quad e^{4iz} - 2ie^{2iz} + 1 = 0.
\end{aligned}$$

Posons $X = e^{2iz}$. L'équation devient

$$X^2 - 2iX + 1 = 0 \Rightarrow X = \frac{2i \pm \sqrt{(-2i)^2 - 4(1)(1)}}{2} = i \pm i\sqrt{2} = i(1 \pm \sqrt{2}).$$

- Si $X = i(1+\sqrt{2})$ alors

$$2iz = \ln(i + i\sqrt{2}) + 2k\pi i = \ln(1+\sqrt{2}) + \frac{\pi}{2}i + 2k\pi i \Rightarrow z = (4k+1)\frac{\pi}{4} - \frac{i}{2}\ln(1+\sqrt{2}),$$

où $k \in \mathbb{Z}$.

- Si $X = i(1-\sqrt{2})$ alors

$$2iz = \ln(i - i\sqrt{2}) + 2k\pi i = \ln(\sqrt{2}-1) - \frac{\pi}{2}i + 2k\pi i \Rightarrow z = (4k-1)\frac{\pi}{4} - \frac{i}{2}\ln(\sqrt{2}-1),$$

où $k \in \mathbb{Z}$.

Question 2 [10 points]

Pour chacun des énoncés suivants, dites s'il est vrai ou faux. Justifiez vos réponses.

a) La fonction $f(z) = z|z|^2$ est analytique en tout point $z \in \mathbb{C}$.

b) La fonction $g(z) = \bar{z}$ est

(i) continue en tout point $z_0 \in \mathbb{C}$ (vrai ou faux?)
(ii) dérivable en $z_0 = i$ (vrai ou faux?)
(iii) analytique en $z_0 = i$ (vrai ou faux?).

c) Si $F(z) = \dfrac{e^z}{z^4 + 16}$ était développée en série (de Taylor ou de Laurent) autour de $z_0 = 0$ alors cette série serait convergente sur le disque $|z| < 2$. On ne demande **pas** le développement en série.

d) On a $\displaystyle\oint_{|z|=1} \frac{\sin^{10}(z)}{z^{10}(z-2)^9}\, dz = 0$.

Réponse:
a) **(2 pts)** Faux. On a $f(x + i\,y) = x(x^2 + y^2) + i\,y(x^2 + y^2)$ et, si u et v sont les parties réelle et imaginaire de f,

$$u_x = 3x^2 + y^2 \neq x^2 + 3y^2 = v_y.$$

Les équation de Cauchy-Riemann ne sont donc pas satisfaites (sauf en 0) et la fonction n'est pas analytique sur $\mathbb{C}$.

b) **(4 pts)** Faux.

- La fonction g est continue : étant donné $\epsilon > 0$, si $\delta = \epsilon$ alors

$$|z - z_0| < \delta \Rightarrow |\overline{z - z_0}| < \delta \Rightarrow |\bar{z} - \bar{z}_0| < \delta \Rightarrow |h(z) - h(z_0)| < \delta = \epsilon.$$

- La fonction h n'est pas dérivable en z_0 car

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{h(z_0 + \Delta z) - h(z_0)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\overline{z_0 + \Delta z} - \bar{z}_0}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\bar{z}_0 + \overline{\Delta z} - \bar{z}_0}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}$$

et cette dernière limite n'existe pas. En effet, si $\Delta z = \Delta x + i\,\Delta y$ alors

$$\lim_{\Delta x \to 0, y=0} \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$$

mais

$$\lim_{\Delta y \to 0, x=0} \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{-i\Delta y}{\Delta y} = -1$$

donc la limite dépend du chemin.

- La fonction g ne peut pas être analytique car elle n'est pas dérivable.

c) **(2 pts)** Vrai. Les singularités de la fonction à intégrer sont les racines quatrièmes de -16, soit $z_k = 2e^{i(\pi/4+2k\pi)/4}$, $k = 0, 1, 2, 3$, et $|z_k| = 2$ pour tout k. Le rayon de convergence R en 0 est la distance de 0 à la singularité la plus proche, donc $R = 2$.

d) **(2 pts)** Vrai. La seule singularité de l'intégrande, f, dans le disque $|z| < 1$ est $z = 0$. Or, puisque $\lim_{z\to 0} \frac{\sin(z)}{z} = 1$, on a

$$\lim_{z\to 0} \frac{\sin^{10}(z)}{z^{10}(z-2)^9} = 1 \cdot \frac{1}{(1-2)^9} = -1.$$

Il s'agit donc d'une singularité apparente, donc $\mathrm{Res}(f(z); z = 0) = 0$ et l'intégrale est nulle.

Question 3 [10 points]

Soit $f(z) = \dfrac{1}{(z-2)(z-4)}$.

a) Que pouvez-vous dire au sujet de la série de Laurent de f en 0 et valide sur le disque $|z| < 2$? (On ne demande **pas** de calculer la série.)

b) Trouvez la série de Laurent de f valide pour $1 < |z-1| < 3$ et simplifez votre réponse autant que possible.

c) Donnez les coefficents a_{-1}, a_0 et a_1 de la série trouvée en b).

d) Le résidu de f en $z = 1$ est-il égal à $-1/2$?

Réponse:

a) **(1 pt)** Les seules singularités de f sont $z = 2$ et $z = 4$, qui ne sont pas à l'intérieur du disque $|z| < 2$. La fonction f est donc analytique sur ce disque et sa série de Laurent en 0 se réduit à une série de Taylor.

b) **(6 pts)** On a

$$\frac{1}{(z-2)(z-4)} = \frac{-1}{2(z-2)} + \frac{1}{2(z-4)}.$$

De plus,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z-2} &= \frac{1}{(z-1)-1} \\
&= \frac{1}{z-1} \cdot \frac{1}{1-1/(z-1)} \\
&= \frac{1}{z-1} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z-1}\right)^n \quad \text{pour } \left|\frac{1}{z-1}\right| < 1 \Leftrightarrow |z-1| > 1 \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z-1)^{n+1}} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(z-1)^n}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\frac{1}{z-4} &= \frac{1}{(z-1)-3}\\ &= \frac{-1}{3(1-(z-1)/3)}\\ &= \frac{-1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-1}{3}\right)^n \quad \text{pour } \left|\frac{z-1}{3}\right| < 1 \Leftrightarrow |z-1| < 3\\ &= \frac{-1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{3^n}\\ &= -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{3^{n+1}}.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\frac{1}{(z-2)(z-4)} = -\frac{1}{2}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(z-1)^n} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{3^{n+1}}\right].$$

c) **(2 pts)** On a $a_{-1} = -1/2$, $a_0 = -1/6$, $a_1 = -1/18$.

d) **(2 pts)** Non, car f est analytique en $z = 1$ donc $\text{Res}(f(z); z = 1) = 0$.

Question 4 [10 points]

Évaluez les intégrales suivantes en utilisant la méthode de votre choix.

a) $J_1 = \oint_{|z|=2} \dfrac{\cos(z)}{z^2(z-1)}\, dz$

b) $J_2 = \oint_C z^2 \sin\left(\dfrac{1}{z}\right) dz$, où C est une courbe fermée entourant l'origine.

c) $J_3 = \int_C \bar{z}^2\, dz$, où C est le quart de cercle défini par $|z| = 5$, $\mathrm{Re}(z) \geq 0$, $\mathrm{Im}(z) \geq 0$, et parcouru de $z_0 = 5$ à $z_1 = 5i$.

d) $J_4 = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{5 + 3\cos(\theta)}\, d\theta$.

Réponse:

a) **(3 pts)** Soit f la fonction à intégrer. Les singularités de f sont $z = 0$ et $z = 2$. Puisque le numérateur de f est analytique et non nul en ces points, la première singularité est un pôle double (racine double du numérateur) et la deuxième est un pôle simple (racine simple du dénominateur). Les deux singularités sont à l'intérieur du cercle $|z| = 2$. On a donc

$$\begin{aligned}
J_1 &= 2\pi i \left(\mathrm{Res}(f(z); z = 0) + \mathrm{Res}(f(z); z = 2)\right) \\
&= 2\pi i \left(\lim_{z\to 0} \frac{d}{dz} z^2 \frac{\cos(z)}{z^2(z-2)} + \lim_{z\to 2} (z-2) \frac{\cos(z)}{z^2(z-2)} \right) \\
&= 2\pi i \left(\lim_{z\to 0} \frac{-\sin(z)(z-2) + \cos(z)}{(z-2)^2} + \lim_{z\to 2} \frac{\cos(z)}{z^2} \right) \\
&= 2\pi i \left(\frac{0+1}{(-2)^2} + \frac{\cos(2)}{4} \right) \\
&= 2\pi i \left(\frac{1}{4} + \frac{\cos(2)}{4} \right) = \frac{i\pi}{2}(1 + \cos(2)).
\end{aligned}$$

b) **(2 pts)** Soit f la fonction à intégrer. La seule singularité de f est $z = 0$ et elle est à l'intérieur de C. On a

$$z^2 \sin\left(\frac{1}{z}\right) = z^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(\frac{1}{z}\right)^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \frac{1}{z^{2n-1}} = z - \frac{1}{3!}\frac{1}{z} + \frac{1}{5!}\frac{1}{z^3} - \cdots .$$

Le résidu de f en 0 est donc $a_{-1} = 1/3! = 1/6$. Par conséquent, $J_2 = 2\pi i\, \mathrm{Res}(f(z); z = 0) = 2\pi i(1/6) = i\pi/3$.

c) **(2 pts)** La courbe C est paramétrée par $z(t) = 5e^{it}$, $0 \leq t \leq \pi/2$. On a $z'(t) = 5ie^{it}$ et

$$J_3 = \int_0^{\pi} \overline{z(t)}^2 z'(t)\,dt = \int_0^{\pi/2} 25e^{-2it} 5ie^{it}\,dt = 125i \int_0^{\pi/2} e^{-it}\,dt = -25(e^{-i\pi/2} - e^0) = 125 + 125i.$$

d) **(3 pts)** Posons $z = e^{i\theta}$ et $\cos(\theta) = (z + z^{-1})/2$, $\sin(\theta) = (z + z^{-1})/(2i)$, $d\theta = dz/iz$. On a

$$\begin{aligned}
J_4 &= \oint_{|z|=1} \frac{1}{5 + 3(z + z^{-1})/2} \frac{dz}{iz} \\
&= \oint_{|z|=1} \frac{-2i}{3z^2 + 10z + 3}\,dz \\
&= -2i \oint_{|z|=1} \frac{dz}{3(z + 1/3)(z + 3)} \\
&= (-2i)(2\pi i)\,\mathrm{Res}(1/(3(z + 1/3)(z + 3)); z = -1/3) \\
&= 4\pi \lim_{z \to -1/3} (z + 1/3) \frac{1}{3(z + 1/3)(z + 3)} \\
&= \frac{4\pi}{8} = \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$