Question 1 [8 points]

Les deux questions suivantes sont indépendantes.

a) Exprimez le nombre suivant sous la forme $a + i\,b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\left(\frac{-1-i}{\sqrt{2}}\right)^{2-i}.$$

b) Trouvez toutes les solutions complexes de l'équation et exprimez votre réponse sous la forme $a + i\,b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\cos(i\,z) = -2i.$$

Réponse:

Question 2 [6 points]

Soit f la fonction définie par $f(z) = z + |z|^2$.

a) La fonction f est-elle dérivable en $z_0 = 0$?

b) La fonction f est-elle analytique en $z_0 = 0$?

Justifiez soigneusement vos réponses.

Réponse:

Question 3 [8 points]

Évaluez les intégrales suivantes. Donnez vos réponses sous la forme $a + i\,b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.

a) $J_1 = \displaystyle\int_C \sinh(z)\cosh(\bar{z})\,dz$, où C est le segment allant de 0 à $\alpha\, i$, où $\alpha > 0$.

b) $J_2 = \displaystyle\int_C z^2\cos(z^3)\,dz$, où C est le quart du cercle $|z| = 1$ allant du point 1 au point i.

Réponse:

Question 4 [9 points]

Soit $f(z) = \dfrac{z}{(z-3)(z-1)}$.

a) La fonction f est-elle analytique en $z = -1$? Si oui, quel est le rayon de convergence de la série de Taylor de f en ce point? Sinon, quelle est la nature de la singularité de f en $z = -1$?

b) Trouvez la série de Laurent de f valide sur le domaine défini par $|z-1| > 2$. Donnez ensuite les coefficients a_{-2}, a_{-1}, a_0 et a_1 pour cette série.

c) Quel est le résidu de f en $z = 0$? Justifiez votre réponse.

Réponse:

Question 5 [9 points]

Évaluez les intégrales suivantes à l'aide des résidus.

a) $J_3 = \oint_C z\, e^{1/(z-1)}\, dz$, où C est le losange de sommets $0, 1+i, 2, 1-i$, parcouru dans le sens horaire.

b) $J_4 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2}\, dx.$

c) **Bonus [3 pts]**

$J_5 = \oint_C \frac{e^{1/z}}{1-z}$, où C est le cercle $|z| = 1/2$, parcouru dans le sens antihoraire.

Réponse: