POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

Questionnaire examen final

MTH2120

Sigle du cours

Identification de l'étudiant(e)		
Nom :	**Prénom :**	
Signature :	**Matricule :**	**Groupe :**

Réservé	
1)	/10
2)	/8
3)	/8
4)	/10
5)	/7
6)	/7

Sigle et titre du cours			
MTH2120 - Analyse appliquée			
Professeur		**Groupe**	**Trimestre**
Antoine Saucier		1	A2020
Jour	**Date**	**Durée**	**Heures**
Mardi	8 décembre 2020	2h30	13h30-16h

Documentation	Calculatrice	Outils électroniques
☐ Aucune ☐ Toute ☒ Voir directives particulières	☐ Aucune ☐ Toutes ☒ Voir directives particulières	Les appareils électroniques personnels sont interdits.

Directives particulières

- Le professeur ne répondra à aucune question durant cet examen. Si vous estimez que vous ne pouvez pas répondre à une question pour diverses raisons, veuillez le justifier puis passer à la question suivante.
- Il est strictement interdit de débrocher l'examen.
- IMPORTANT : inscrire votre matricule sur toutes les pages numérotées.
- Un aide-mémoire se trouve dans les deux dernières pages du cahier.
- Une calculatrice non-programmable autorisée est permise.
- Rappel: la pondération de cet examen est 50%.

Cet examen contient 6 questions sur un total de 32 pages **(incluant cette page).**

L'étudiant doit honorer l'engagement pris lors de la signature du code de conduite.

Justifiez vos réponses. Matricule:

Question 1 (10 points)

Évaluer

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2+\sin(\theta)}$$

et *justifier chaque étape de votre démarche.*

BROUILLON

Ne sera pas numérisé, ni corrigé

Justifiez vos réponses. Matricule:

BROUILLON

Ne sera pas numérisé, ni corrigé

Justifiez vos réponses. Matricule:

BROUILLON

Ne sera pas numérisé, ni corrigé

Justifiez vos réponses. Matricule:

BROUILLON

Ne sera pas numérisé, ni corrigé

Justifiez vos réponses. Matricule:

Question 2 (8 points)

a) (4 points) Le système linéaire T est défini pour $t \in \mathbb{R}$ par

$$y(t) = T(x(t)) = x(t) - e^{-t} \int_{-\infty}^{t} e^{\theta} x(\theta) \, d\theta.$$

Ce système est-il stationnaire? Justifier votre réponse.

b) (4 points) Les distributions de Dirac

$$\delta(t-a) \quad \text{et} \quad \delta(a-t),$$

où a est une constante réelle et $t \in \mathbb{R}$, sont-elles égales au sens des distributions? Justifier votre réponse.

BROUILLON

Ne sera pas numérisé, ni corrigé

Justifiez vos réponses. Matricule:

Justifiez vos réponses. Matricule:

BROUILLON

Ne sera pas numérisé, ni corrigé

Justifiez vos réponses. Matricule:

BROUILLON

Ne sera pas numérisé, ni corrigé

Justifiez vos réponses. Matricule:

BROUILLON

Ne sera pas numérisé, ni corrigé

Justifiez vos réponses. Matricule:

Question 3 (8 points)

a) (3 points) La transformée de Laplace $F(s)$ d'une fonction $f(t)$ est

$$F(s) = \frac{1}{(s-a)(s-b)},$$

où a et b sont des constantes réelles distinctes.

On demande de calculer $f(t)$ en utilisant un produit de convolution.

b) (5 points) La transformée de Laplace $F(s)$ d'une fonction $f(t)$ est

$$F(s) = \frac{1}{s^2(s-a)},$$

où a est une constante réelle non-nulle.

On demande de calculer $f(t)$ en utilisant un calcul de résidus. Justifier chaque étape de votre démarche.

BROUILLON

Ne sera pas numérisé, ni corrigé

Justifiez vos réponses. Matricule:

BROUILLON

Ne sera pas numérisé, ni corrigé

Justifiez vos réponses. Matricule:

BROUILLON

Ne sera pas numérisé, ni corrigé

Justifiez vos réponses. Matricule:

BROUILLON

Ne sera pas numérisé, ni corrigé

Justifiez vos réponses. Matricule:

BROUILLON

Ne sera pas numérisé, ni corrigé

Justifiez vos réponses. Matricule:

Question 4 (10 points)

Le système linéaire stationnaire en temps discret $y(n) = T(x(n))$ est défini par

$$\begin{cases} y(n+2) - 2\,y(n+1) + y(n) = x(n+1) - x(n), \;\; n = 0, 1, 2, ... \\ y(0) = y(1) = 0, \quad x(0) = 0. \end{cases}$$

a) (3 pts) Calculer la fonction de transfert $H(z)$ de ce système.

b) (7 pts) Calculer la réponse $y(n)$ de ce système à l'entrée

$$x(n) = \alpha^n \; u(n-1),$$

où u désigne la fonction échelon et α est une constante réelle.

Indication:

$$u(n) = \begin{cases} 1 \text{ si } n \geq 0, \\ 0 \text{ si } n < 0. \end{cases}$$

Justifiez vos réponses. Matricule:

BROUILLON

Ne sera pas numérisé, ni corrigé

Justifiez vos réponses. Matricule:

BROUILLON

Ne sera pas numérisé, ni corrigé

Justifiez vos réponses. Matricule:

BROUILLON

Ne sera pas numérisé, ni corrigé

Justifiez vos réponses. Matricule:

BROUILLON

Ne sera pas numérisé, ni corrigé

Justifiez vos réponses. Matricule:

Question 5 (7 points)

La fonction f est définie sur $]-\pi, \pi[$ par

$$f(x) := \begin{cases} 0 \text{ si } -\pi < x < 0, \\ 1 \text{ si } 0 \leq x < \pi. \end{cases}$$

Le prolongement périodique de période 2π de la fonction f a pour série de Fourier

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin[(2k+1)x]}{(2k+1)}.$$

a) (5 points) Évaluer

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}.$$

b) (2 points) La fonction g est définie sur $]-\pi, \pi[$ par

$$g(x) := \begin{cases} x - 2 \quad \text{si } -\pi < x < -\pi/2, \\ x^2 + 1 \text{ si } -\pi/2 \leq x < \pi. \end{cases}$$

Soit $G(x)$ la série de Fourier du prolongement périodique de période 2π de la fonction g.

Donner $G(-\pi/2)$ et justifier votre réponse.

BROUILLON

Ne sera pas numérisé, ni corrigé

Justifiez vos réponses. Matricule:

BROUILLON

Ne sera pas numérisé, ni corrigé

Justifiez vos réponses. Matricule:

BROUILLON

Ne sera pas numérisé, ni corrigé

Justifiez vos réponses. Matricule:

BROUILLON

Ne sera pas numérisé, ni corrigé

Justifiez vos réponses. Matricule:

BROUILLON

Ne sera pas numérisé, ni corrigé

Justifiez vos réponses. Matricule:

Question 6 (7 points)

La transformée de Laplace $F(s)$ d'une fonction $f(t)$ est

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-s\,t}\, f(t)\, dt,$$

où $s = x + i\,y$ et $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On supposera que $F(s)$ existe pour $\mathrm{Re}(s) \geq \gamma$, où $\gamma \in \mathbb{R}$ est une constante.

La fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est définie par

$$g(t) = \begin{cases} e^{-\gamma\,t}\, f(t) & \text{si } t \geq 0, \\ 0 & \text{si } t < 0. \end{cases}$$

En calculant la transformée de Fourier de g, puis en utilisant le théorème de Fourier, montrer que

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_C e^{s\,t}\, F(s)\, ds,$$

où C est la droite d'équation $s = \gamma + i\,\omega$, ω variant de $-\infty$ à $+\infty$.

Justifier chaque étape de votre calcul.

Justifiez vos réponses. Matricule:

BROUILLON

Ne sera pas numérisé, ni corrigé

Justifiez vos réponses. Matricule:

BROUILLON

Ne sera pas numérisé, ni corrigé

Justifiez vos réponses. Matricule:

BROUILLON

Ne sera pas numérisé, ni corrigé

Justifiez vos réponses. Matricule:

BROUILLON

Ne sera pas numérisé, ni corrigé

AIDE MÉMOIRE

$$\text{Pôle simple : } \operatorname{Res}(f(z); z=a) = \lim_{z \to a} ((z-a)\, f(z)).$$

$$\text{Pôle double : } \operatorname{Res}(f(z); z=a) = \lim_{z \to a} \frac{d}{dz}\left((z-a)^2\, f(z)\right).$$

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)\, z^{-n}, \quad f(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_C F(z)\, z^{n-1}\, dz.$$

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-s\,t} f(t)\, dt, \quad f(t) = \sum_k \operatorname{Res}\left(e^{s\,t} F(s); s = s_k\right) \text{ si } \lim_{|s| \to \infty} F(s) = 0.$$

$$Z\left((f_1 * f_2)(n)\right) = F_1(z)\, F_2(z).$$

$$L\left(f(t) * g(t)\right) = F(s)\, G(s), \quad F\left(f(t) * g(t)\right) = \sqrt{2\pi}\, \hat{f}(\omega)\, \hat{g}(\omega).$$

$$\text{Général: } (x * y)(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\, y(n-k).$$

$$\text{Transformée en z : } (x * y)(n) = \sum_{k=0}^{n} x(k)\, y(n-k).$$

$$\text{Général: } (f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\theta)\, g(t-\theta)\, d\theta.$$

$$\text{Transformée de Laplace: } (f * g)(t) = \int_0^{t} f(\theta)\, g(t-\theta)\, d\theta.$$

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\,\omega\,t} f(t)\, dt, \quad f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\,\omega\,t}\, \hat{f}(\omega)\, d\omega.$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(n\pi x/L) + b_n \sin(n\pi x/L)\right)$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x)\, \cos(n\pi x/L)\, dx,\ n \geq 0. \quad b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x)\, \sin(n\pi x/L)\, dx,\ n \geq 1.$$

$$\frac{1}{L} \int_{-L}^{L} |f(t)|^2\, dt = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 + b_n^2\right)$$

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\, e^{i\,n\,\pi\,x/L}, \quad c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(x)\, e^{-i\,n\,\pi\,x/L}\, dx.$$

$$\frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} |f(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2$$

BROUILLON

Ne sera pas numérisé, ni corrigé

Transformées de Laplace élémentaires

$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$	Notes
1. 1	$\dfrac{1}{s}, \quad s > 0$	Sec. 6.1 ; Ex. 4
2. e^{at}	$\dfrac{1}{s-a}, \quad s > a$	Sec. 6.1 ; Ex. 5
3. t^n; $n =$ entier positif	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}, \quad s > 0$	Sec. 6.1 ; Prob. 27
4. $t^p,\ p > -1$	$\dfrac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}, \quad s > 0$	Sec. 6.1 ; Prob. 27
5. $\sin at$	$\dfrac{a}{s^2+a^2}, \quad s > 0$	Sec. 6.1 ; Ex. 6
6. $\cos at$	$\dfrac{s}{s^2+a^2}, \quad s > 0$	Sec. 6.1 ; Prob. 6
7. $\sinh at$	$\dfrac{a}{s^2-a^2}, \quad s > \lvert a\rvert$	Sec. 6.1 ; Prob. 8
8. $\cosh at$	$\dfrac{s}{s^2-a^2}, \quad s > \lvert a\rvert$	Sec. 6.1 ; Prob. 7
9. $e^{at}\sin bt$	$\dfrac{b}{(s-a)^2+b^2}, \quad s > a$	Sec. 6.1 ; Prob. 13
10. $e^{at}\cos bt$	$\dfrac{s-a}{(s-a)^2+b^2}, \quad s > a$	Sec. 6.1 ; Prob. 14
11. $t^n e^{at}$, $n =$ entier positif	$\dfrac{n!}{(s-a)^{n+1}}, \quad s > a$	Sec. 6.1 ; Prob. 18
12. $u_c(t)$	$\dfrac{e^{-cs}}{s}, \quad s > 0$	Sec. 6.3
13. $u_c(t)f(t-c)$	$e^{-cs}F(s)$	Sec. 6.3
14. $e^{ct}f(t)$	$F(s-c)$	Sec. 6.3
15. $f(ct)$	$\dfrac{1}{c}F\left(\dfrac{s}{c}\right), \quad c > 0$	Sec. 6.3 ; Prob. 19
16. $\displaystyle\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau$	$F(s)G(s)$	Sec. 6.6
17. $\delta(t-c)$	e^{-cs}	Sec. 6.5
18. $f^{(n)}(t)$	$s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$	Sec. 6.2
19. $(-t)^n f(t)$	$F^{(n)}(s)$	Sec. 6.2 ; Prob. 28

BROUILLON

Ne sera pas numérisé, ni corrigé