

Contrôle périodique

Nicolas Saunier
nicolas.saunier@polymtl.ca

8 mars 2016

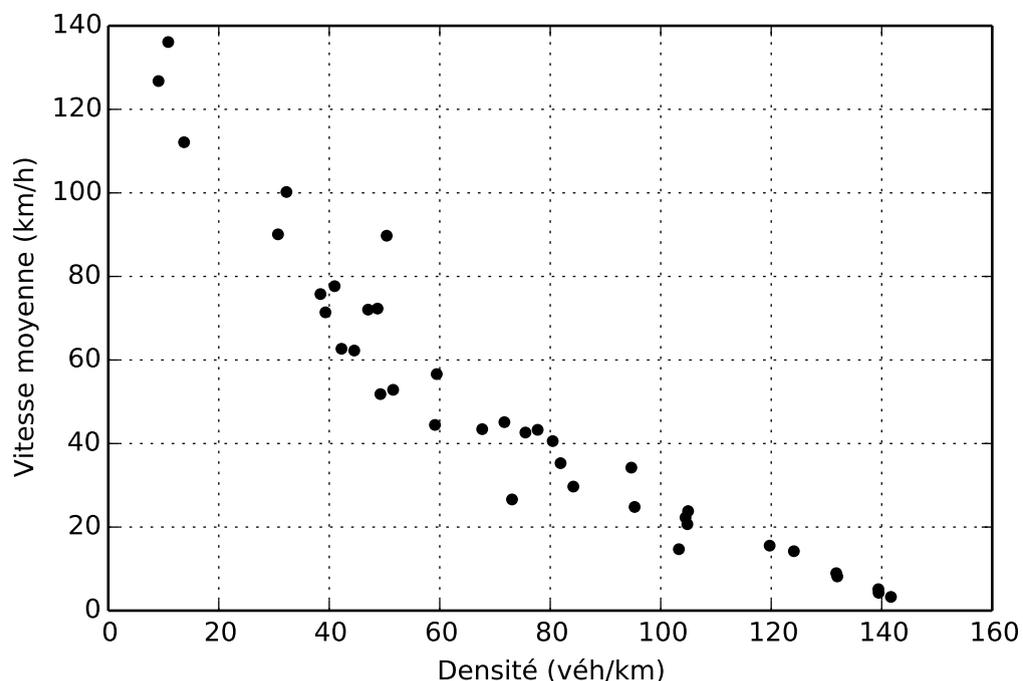
Notez le barème (la note totale est sur 20) et le temps indicatif à consacrer à chaque exercice. Veuillez indiquer clairement les numéros des questions que vous traitez et vos réponses correspondantes (et souligner ou encadrer les résultats numériques). Apportez une attention particulière à la rédaction et à la définition des notations que vous employez.

Seule une feuille personnelle de notes recto-verso est permise. Des tables statistiques sont incluses à la fin de l'énoncé.

Exercice 1

30 min (/5)

La figure suivante présente des mesures de densité et de vitesse moyenne pour une autoroute à deux voies, pour une des directions.



1. Proposer une relation mathématique simple entre la vitesse moyenne et la densité correspondant à la figure : tracer la courbe sur la figure et estimer ses paramètres.
2. Calculer la densité critique, la vitesse critique et la capacité de cette route et les représenter sur le graphique.

3. Alors que l'autoroute est fluide avec une densité de 25 véh/km, un incident se produit et bloque l'autoroute pendant 20 min. Calculer la longueur de la file, en distance et nombre de véhicules, à la fin de l'incident.

Solution

1. Les mesures de la circulation de densité k et de vitesse moyenne v ont été générées par une relation logarithmique bruitée, de la forme $v = v_c * \ln(k_j/k)$ où v est la vitesse, k la densité et les paramètres sont la vitesse critique v_c et la densité de congestion k_j .
Il était aussi possible d'estimer une relation linéaire $v = ak + b = v_{max}(1 - k/k_j)$ où v_{max} est la vitesse maximale (libre) et k_j la densité de congestion. v_{max} est l'ordonnée à l'origine, soit environ 120 km/h, et k_j la valeur de densité pour laquelle la vitesse est nulle, c'est à dire que la valeur de la densité à laquelle la droite croise l'axe des abscisses, soit environ 130 véh/km.
2. Pour le modèle du diagramme fondamental linéaire (entre vitesse et densité, soit le modèle de Greenshields), on a la densité critique $k_c = k_j/2 = 65$ véh/km, la vitesse critique $v_c = v_{max}/2 = 60$ km/h et la capacité 3900 véh/h qui en est le produit (et se visualise comme l'air du rectangle entre les axes et les droites $k = k_c$ et $v = v_c$).
3. Une onde de choc se produit entre les conditions de circulation fluide initiale (état 1, avec densité $k_1 = 25$ véh/km et débit $q_1 = 2423$ véh/h) et les conditions de circulation à l'arrêt juste en amont de l'incident (état 2, avec densité $k_2 = k_j = 130$ véh/km et débit $q_2 = 0$ véh/h). L'onde de choc entre les états de circulation 1 et 2, soit la vitesse de l'arrière de la file d'attente qui se forme en amont de l'incident, est $w_{12} = (q_1 - q_2)/(k_1 - k_2) = -23.08$ km/h. On en déduit que la file d'attente sera longue de 7.69 km et contiendra $7.69 \times k_j = 1000$ véh à la fin de l'incident.

Exercice 2

45 min (/7)

Les positions (coordonnée longitudinale x) de trois véhicules (V1, V2, et V3) se suivant sur une autoroute dans la voie la plus à droite sont mesurées deux fois par seconde à l'aide de caméras vidéo. Le tableau suivant contient les positions pour 10 secondes consécutives.

Instant (s)	Position de V1 (m)	Position de V2 (m)	Position de V3 (m)
0.0	138.0	118.5	107.6
0.5	141.6	121.8	111.4
1.0	145.3	125.0	114.7
1.5	149.0	127.9	117.7
2.0	152.6	130.7	120.5
2.5	156.1	134.7	123.6
3.0	159.7	137.9	126.5
3.5	163.5	141.3	128.9
4.0	167.3	145.0	132.1
4.5	171.0	148.7	135.6
5.0	174.7	152.5	139.3
5.5	178.0	156.1	143.1
6.0	181.2	159.8	147.5
6.5	184.7	163.6	152.1
7.0	188.4	167.4	156.3
7.5	191.8	171.2	160.5
8.0	195.2	175.0	164.2
8.5	198.3	178.6	167.8
9.0	201.2	182.1	171.2
9.5	204.1	185.4	174.3
10.0	207.2	188.6	177.3

1. Calculer les distances inter-véhiculaires aux instants 3 et 6 s.
2. Estimer les temps inter-véhiculaires au point $x = 146$ m.
3. Calculer les densités et débits correspondants.
4. Calculer les vitesses moyennes temporelle et spatiale au point $x = 170$ m. Vérifier l'inégalité de Wardrop.
5. Calculer la vitesse moyenne spatiale à l'instant 5 s.
6. Tracer le nombre cumulé de véhicules en fonction du temps au point $x = 170$ m et le nombre cumulé de véhicules en fonction de x à l'instant 4 s.

Solution

1. À $t = 3$ s, les distances inter-véhiculaires entre les véhicules 1 et 2 et 2 et 3 sont respectivement $s_{12}(3) = 21.8$ m et $s_{23}(3) = 11.4$ m. À $t = 6$ s, les distances inter-véhiculaires entre les véhicules 1 et 2 et 2 et 3 sont respectivement $s_{12}(6) = 21.4$ m et $s_{23}(6) = 12.3$ m.
2. Pour déterminer les instants de passage des véhicules en des points de l'espace, il faut extrapoler entre les positions connues à des instants particuliers. Par exemple, le véhicule 1 passe au point $x = 146$ m à $t_1(146) = 1 + (146 - 145.3) \times 0.5 / (149 - 145.3) = 1.09$ s. De même, les véhicules 2 et 3 passent ce point respectivement à $t_2(146) = 4.14$ s et $t_3(146) = 5.83$ s. On en déduit les temps inter-véhiculaires respectifs entre les véhicules 1 et 2, 2 et 3 $h_{12}(146) = 3.05$ s et $h_{23}(146) = 1.69$ s.
3. On calcule les densités et débits correspondants respectivement comme les inverses des temps et distances inter-véhiculaires moyens. Les densités à $t = 3$ s et $t = 6$ s sont respectivement $k(3) = 60.2$ véh/km et $k(6) = 59.3$ véh/km. Le débit à $x = 146$ m est $q(146) = 1519$ véh/h.

4. En supposant des mouvements à vitesse constante entre les instants de mesure des positions des véhicules, les vitesses instantanées des véhicules 1, 2 et 3 au point $x = 170$ m sont respectivement $v_1(170) = 7.4$ m/s, $v_2(170) = 7.6$ m/s et $v_3(170) = 6.8$ m/s. On en déduit la vitesse moyenne temporelle comme la moyenne arithmétique des vitesses instantanées $v_t(170) = 7.27$ m/s et la vitesse moyenne spatiale comme la moyenne harmonique des vitesses instantanées $v_s(170) = 7.25$ m/s, et on vérifie que $v_t(170) \geq v_s(170)$.
5. À un instant donné, la vitesse moyenne spatiale est la moyenne arithmétique des vitesses instantanées : à $t = 5$ s, on obtient $v_s(5) = 7.47$ m/s.
6. Le nombre cumulé de véhicules en un point de la route est une fonction en escalier croissante en fonction du temps : au point $x = 170$ m, les instants de passage des véhicules sont respectivement 4.36 s, 7.34 s et 8.82 s. Le nombre cumulé de véhicules à un instant donné est une fonction en escalier décroissante en fonction de l'espace : à l'instant $t = 4$ s, les positions des véhicules sont respectivement 132.1 m, 145.0 m et 167.3 m.

Exercice 3

40 min (/6)

Chaque année, lors de la journée des portes ouvertes de Polytechnique, des comptages de l'achalandage sont effectués par intervalle de temps de 1 min. Le tableau suivant donne le nombre d'intervalles pour lesquels on a observé un certain nombre de personnes entrant au pavillon Lassonde les années 2014 et 2015.

Nombre de personnes	Nombre d'intervalles en 2014	Nombre d'intervalles en 2015
0	3	1
1	5	2
2	11	7
3	10	10
4	13	13
5	11	11
6	7	11
7	4	6
8	3	6
9	2	2

Est-ce que les arrivées à la journée des portes ouvertes en 2014 suivent une loi de Poisson ? Est-ce que les deux distributions sont significativement différentes ? Conclure sur l'évolution de l'achalandage des portes ouvertes.

Solution

Il faut faire deux tests statistiques d'adéquation (test du χ^2) entre la distribution du nombre de personnes arrivant par intervalle de 1 min en 2014 et la distribution théorique qui serait obtenue si le nombre de personnes arrivant suit une loi de Poisson (de moyenne 4.0 personnes par intervalle de 1 min), puis entre les deux distributions de 2014 et 2015. Après regroupement des catégories pour lesquelles il y a moins de 5 observations (0, 1 et 7 personnes ou plus arrivant par intervalle), la statistique du premier test vaut 1.69 ce qui correspond à un risque de première espèce de 0.11 (pour une distribution du χ^2 à $n - 1 - p = 7 - 1 - 1 = 5$ degrés de liberté) : on ne peut donc pas rejeter l'hypothèse nulle que le nombre de personnes arrivant par intervalle de 1 min suit la loi de Poisson

en 2014.

La statistique du second test vaut 9.32, ce qui correspond à un risque de première espèce de 0.90 (pour une distribution du χ^2 à $n - 1 - p = 6 - 1 - 0 = 5$ degrés de liberté) : selon le risque de première espèce accepté, on pourrait rejeter (10 % de chance de se tromper) l'hypothèse nulle que les distributions du nombre de personnes arrivant par intervalle de 1 min en 2014 et 2015 sont tirées de la même loi. Quand on calcule le nombre moyen de personnes arrivant (4.0 et 4.7 par intervalle de 1 min respectivement en 2014 et 2015), on observe une augmentation de la moyenne du nombre d'arrivées.

Exercice 4

10 min (/2)

Veillez répondre brièvement aux questions suivantes sur les simulations de la circulation :

1. Citer au moins deux caractéristiques des modèles dans les simulations de la circulation (comme le niveau de détail).
2. Quelle est la différence entre la calibration et validation d'un logiciel de simulation de la circulation.
3. Donner un exemple d'indicateur utilisé pour calibrer une simulation de circulation.
4. Quel est le bon nombre de répétitions à effectuer pour une simulation de la circulation ? Justifier.

Solution

1. Par exemple (début de la section 3.6 dans les notes)
 - Niveau de détail : microscopique et macroscopique
 - Représentation des processus : déterministe ou stochastique
2. La calibration consiste à chercher des paramètres donnant la meilleure adéquation du modèle à des données observées (au travers de fonction d'ajustement sur des indicateurs, combinées dans une fonction objectif). La validation consiste à utiliser les paramètres calibrés dans d'autres conditions de circulation et à mesurer l'adéquation du modèle à des données observées séparées de celles utilisées en calibration.
3. Exemples d'indicateurs : les TIV, les vitesses individuelles, les temps de parcours (sur différents parcours), les débits.
4. Le nombre de répliques dépend du modèle et des indicateurs utilisés : il doit être choisi de sorte que les indicateurs calculés sur un ensemble de répliques soit stable et seulement fonction des paramètres du modèle, et ne dépende pas des répliques elles-mêmes (tirages particuliers des nombres aléatoires pour chaque réplique). Si les fonctions d'ajustement reposent sur des moyennes d'indicateurs (par période de temps ou sur plusieurs unités du réseau), il est possible d'utiliser les formules sur le calcul de taille d'échantillon basées sur les intervalles de confiance de la moyenne.

Point bonus

(/1)

Décrire en une phrase un projet présenté le 23 février par François Bélisle.

	0.995	0.99	0.975	0.95	0.9	0.75	0.5	0.25	0.1	0.05	0.025	0.01	0.005
1	3.927e-05	0.0001571	0.0009821	0.003932	0.01579	0.1015	0.4549	1.323	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879
2	0.01003	0.0201	0.05064	0.1026	0.2107	0.5754	1.386	2.773	4.605	5.991	7.378	9.21	10.6
3	0.07172	0.1148	0.2158	0.3518	0.5844	1.213	2.366	4.108	6.251	7.815	9.348	11.34	12.84
4	0.207	0.2971	0.4844	0.7107	1.064	1.923	3.357	5.385	7.779	9.488	11.14	13.28	14.86
5	0.4117	0.5543	0.8312	1.145	1.61	2.675	4.351	6.626	9.236	11.07	12.83	15.09	16.75
6	0.6757	0.8721	1.237	1.635	2.204	3.455	5.348	7.841	10.64	12.59	14.45	16.81	18.55
7	0.9893	1.239	1.69	2.167	2.833	4.255	6.346	9.037	12.02	14.07	16.01	18.48	20.28
8	1.344	1.646	2.18	2.733	3.49	5.071	7.344	10.22	13.36	15.51	17.53	20.09	21.95
9	1.735	2.088	2.7	3.325	4.168	5.899	8.343	11.39	14.68	16.92	19.02	21.67	23.59
10	2.156	2.558	3.247	3.94	4.865	6.737	9.342	12.55	15.99	18.31	20.48	23.21	25.19
11	2.603	3.053	3.816	4.575	5.578	7.584	10.34	13.7	17.28	19.68	21.92	24.72	26.76
12	3.074	3.571	4.404	5.226	6.304	8.438	11.34	14.85	18.55	21.03	23.34	26.22	28.3
13	3.565	4.107	5.009	5.892	7.042	9.299	12.34	15.98	19.81	22.36	24.74	27.69	29.82
14	4.075	4.66	5.629	6.571	7.79	10.17	13.34	17.12	21.06	23.68	26.12	29.14	31.32
15	4.601	5.229	6.262	7.261	8.547	11.04	14.34	18.25	22.31	25	27.49	30.58	32.8
16	5.142	5.812	6.908	7.962	9.312	11.91	15.34	19.37	23.54	26.3	28.85	32	34.27
17	5.697	6.408	7.564	8.672	10.09	12.79	16.34	20.49	24.77	27.59	30.19	33.41	35.72
18	6.265	7.015	8.231	9.39	10.86	13.68	17.34	21.6	25.99	28.87	31.53	34.81	37.16
19	6.844	7.633	8.907	10.12	11.65	14.56	18.34	22.72	27.2	30.14	32.85	36.19	38.58
20	7.434	8.26	9.591	10.85	12.44	15.45	19.34	23.83	28.41	31.41	34.17	37.57	40
21	8.034	8.897	10.28	11.59	13.24	16.34	20.34	24.93	29.62	32.67	35.48	38.93	41.4
22	8.643	9.542	10.98	12.34	14.04	17.24	21.34	26.04	30.81	33.92	36.78	40.29	42.8
23	9.26	10.2	11.69	13.09	14.85	18.14	22.34	27.14	32.01	35.17	38.08	41.64	44.18
24	9.886	10.86	12.4	13.85	15.66	19.04	23.34	28.24	33.2	36.42	39.36	42.98	45.56
25	10.52	11.52	13.12	14.61	16.47	19.94	24.34	29.34	34.38	37.65	40.65	44.31	46.93
26	11.16	12.2	13.84	15.38	17.29	20.84	25.34	30.43	35.56	38.89	41.92	45.64	48.29
27	11.81	12.88	14.57	16.15	18.11	21.75	26.34	31.53	36.74	40.11	43.19	46.96	49.64
28	12.46	13.56	15.31	16.93	18.94	22.66	27.34	32.62	37.92	41.34	44.46	48.28	50.99
29	13.12	14.26	16.05	17.71	19.77	23.57	28.34	33.71	39.09	42.56	45.72	49.59	52.34
30	13.79	14.95	16.79	18.49	20.6	24.48	29.34	34.8	40.26	43.77	46.98	50.89	53.67

Dans la table de la loi du χ^2 ci-dessus, les lignes correspondent au nombre de degrés de liberté (indiqué dans la première colonne), les colonnes au risque de faire une erreur de type I (indiqué sur la première ligne) : le risque de première espèce est la probabilité qu'une variable aléatoire X suivant la loi du χ^2 à d degré de liberté soit supérieure à la valeur correspondante dans le tableau.

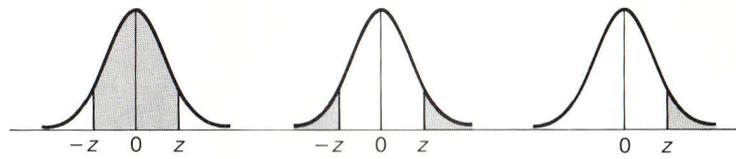


Table 1B
Critical values for the standard normal distribution

CONFIDENCE INTERVALS $P(Z \leq z)$	TWO-SIDED TESTS $P(Z \geq z)$	ONE-SIDED TESTS $P(Z \geq z)$	CRITICAL VALUE z
.10	.90	.45	.126
.20	.80	.40	.253
.30	.70	.35	.385
.40	.60	.30	.524
.50	.50	.25	.674
.60	.40	.20	.842
.70	.30	.15	1.036
.80	.20	.10	1.282
.90	.10	.05	1.645
.95	.05	.025	1.960
.98	.02	.01	2.326
.99	.01	.005	2.576
.995	.005	.0025	2.807
.999	.001	.0005	3.290
.9995	.0005	.00025	3.480
.9999	.0001	.00005	3.890
.99999	.00001	.000005	4.420
.999999	.000001	.0000005	4.900

Source: D. B. Owen and D. T. Monk, *Tables of the Normal Probability Integral*, Sandia Corporation Technical Memo 64-57-51 (March 1957).