TESTS PARAMÉTRIQUES USUELS (une population)

Critères de rejet pour un niveau (seuil) critique α.

Situation	Statistique du test			
Une moyenne μ — $H_0 : \mu = \mu_0$		$H_1 : \mu < \mu_0$	$H_1 : \mu > \mu_0$	$H_1 : \mu \neq \mu_0$
σ^2 est connue et $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, ou n grand	$Z_0 = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$	rejeter H_0 si $Z_0 < -z_\alpha$ $\beta(d)$, page 491	rejeter H_0 si $Z_0 > z_\alpha$ $\beta(d)$, page 491	rejeter H_0 si $\lvert Z_0\rvert > z_{\alpha/2}$ $\beta(d)$, page 490
σ^2 est inconnue et $X \sim N(\mu, \sigma^2)$	$T_0 = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$	rejeter H_0 si $T_0 < -t_{\alpha;n-1}$ $\beta(d)$, page 493	rejeter H_0 si $T_0 > t_{\alpha;n-1}$ $\beta(d)$, page 493	rejeter H_0 si $\lvert T_0\rvert > t_{\alpha/2;n-1}$ $\beta(d)$, page 492
σ^2 est inconnue et n est très grand	$Z_0 = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$	rejeter H_0 si $Z_0 < -z_\alpha$ $\beta(d)$, page 491	rejeter H_0 si $Z_0 > z_\alpha$ $\beta(d)$, page 491	rejeter H_0 si $\lvert Z_0\rvert > z_{\alpha/2}$ $\beta(d)$, page 490
Une variance σ^2 — $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$		$H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2$	$H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$	$H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$
$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ et μ et σ^2 sont inconnues	$\chi_0^2 = (n-1)\dfrac{S^2}{\sigma_0^2}$	rejeter H_0 si $\chi_0^2 < \chi^2_{1-\alpha;n-1}$ $\beta(\lambda)$, page 496	rejeter H_0 si $\chi_0^2 > \chi^2_{\alpha;n-1}$ $\beta(\lambda)$, page 495	rejeter H_0 si $\chi_0^2 < \chi^2_{1-\alpha/2;n-1}$ ou $\chi_0^2 > \chi^2_{\alpha/2;n-1}$ $\beta(\lambda)$, page 494
n est grand ($n \geq 40$)	$Z_0 = \dfrac{S - \sigma_0}{\sigma_0/\sqrt{2n}}$	rejeter H_0 si $Z_0 < -z_\alpha$	rejeter H_0 si $Z_0 > z_\alpha$	rejeter H_0 si $\lvert Z_0\rvert > z_{\alpha/2}$
Une proportion p — $H_0 : p = p_0$		$H_1 : p < p_0$	$H_1 : p > p_0$	$H_1 : p \neq p_0$
$X \sim$ Bernoulli de paramètre p et n est très grand	$Z_0 = \dfrac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0(1-p_0)}{n}}}$	rejeter H_0 si $Z_0 < -z_\alpha$ si β : pp.291-292	rejeter H_0 si $Z_0 > z_\alpha$ β : pp.291-292	rejeter H_0 si $\lvert Z_0\rvert > z_{\alpha/2}$ β : pp.291-292

Les critères de rejet ci-dessus sont déterminés en considérant un échantillon aléatoire $X_1, \ldots, X_n$ d'une variable X.
La moyenne et la variance de l'échantillon sont: $\overline{X} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$, et $S^2 = \dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$ respectivement.

Pour $0 < a < 1$, les nombres (ou centiles) z_a , $t_{a;n-1}$ et $\chi^2_{a;n-1}$ sont définis par :

$$\Phi(z_a) = 1 - a \ ; \quad P(T_{n-1} > t_{a;n-1}) = a \ ; \quad P(\chi^2_{n-1} > \chi^2_{a;n-1}) = a.$$

Calcul de β :

- Pour le test portant sur une moyenne, $d = \dfrac{|\mu - \mu_0|}{\sigma}$, et $\beta(d) = P\big(\text{accepter } H_0 |\ |\mu - \mu_0| = d\sigma\big)$.
- Pour le test portant sur une variance, $\lambda = \dfrac{\sigma}{\sigma_0}$, et $\beta(\lambda) = P\big(\text{accepter } H_0 | \sigma = \lambda\sigma_0\big)$.
- Pour le test portant sur une proportion p, les formules (11.48) à (11.52) pages 291 et 292 du livre donnent $\beta(p)$ et n.

TESTS PARAMÉTRIQUES USUELS (deux populations)

Critères de rejet pour un niveau (seuil) critique α.

Situation	Statistique du test			
2 moyennes μ_1, μ_2	$H_0 : \mu_1 = \mu_2$	$H_1 : \mu_1 < \mu_2$	$H_1 : \mu_1 > \mu_2$	$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$
σ_1^2 et σ_2^2 sont connues et $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$, $i = 1, 2$ ou alors n_1 et n_2 grands.	$Z_0 = \dfrac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$	rejeter H_0 si $Z_0 < -z_\alpha$ $\beta(d)$, page 491	rejeter H_0 si $Z_0 > z_\alpha$ $\beta(d)$, page 491	rejeter H_0 si $\lvert Z_0\rvert > z_{\alpha/2}$ $\beta(d)$, page 490
σ_1^2 et σ_2^2 sont inconnues avec $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ et $X_i \sim N(\mu_i, \sigma^2)$, $i = 1, 2$	$T_0 = \dfrac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$ $(*)$	rejeter H_0 si $T_0 < -t_{\alpha;n_1+n_2-2}$	rejeter H_0 si $T_0 > t_{\alpha;n_1+n_2-2}$	rejeter H_0 si $\lvert T_0\rvert > t_{\alpha/2;n_1+n_2-2}$
σ_1^2 et σ_2^2 sont inconnues avec $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ et $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$, $i = 1, 2$	$T_0 = \dfrac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}}$ $(**)$	rejeter H_0 si $T_0 < -t_{\alpha;\nu}$	rejeter H_0 si $T_0 > t_{\alpha;\nu}$	rejeter H_0 si $\lvert T_0\rvert > t_{\alpha/2;\nu}$
σ_1^2 et σ_2^2 sont inconnues et n_1, n_2 sont grands $(n_1 \geq 30,\ n_2 \geq 30)$	$Z_0 = \dfrac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}}$	rejeter H_0 si $Z_0 < -z_\alpha$	rejeter H_0 si $Z_0 > z_\alpha$	rejeter H_0 si $\lvert Z_0\rvert > z_{\alpha/2}$
Les observations sont couplées $D = X_1 - X_2 \sim$ Normale $D_j = X_{1j} - X_{2j}$, $j = 1, \ldots, n$	$T_0 = \dfrac{\overline{D}}{S_D/\sqrt{n}}$ $(***)$	rejeter H_0 si $T_0 < -t_{\alpha;n-1}$	rejeter H_0 si $T_0 > t_{\alpha;n-1}$	rejeter H_0 si $\lvert T_0\rvert > t_{\alpha/2;n-1}$
2 variances σ_1^2, σ_2^2	$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$	$H_1 : \sigma_1^2 < \sigma_2^2$	$H_1 : \sigma_1^2 > \sigma_2^2$	$H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$
$X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$, $i = 1, 2$	$F_0 = \dfrac{S_1^2}{S_2^2}$	rejeter H_0 si $F_0 < F_{1-\alpha;n_1-1,n_2-1}$	rejeter H_0 si $F_0 > F_{\alpha;n_1-1,n_2-1}$ $\beta(\lambda)$, page 498	rejeter H_0 si $F_0 < F_{1-\alpha/2;n_1-1,n_2-1}$ ou $F_0 > F_{\alpha/2;n_1-1,n_2-1}$ $\beta(\lambda)$, page 497
n_1 et n_2 sont grands $n_1 > 40,\ n_2 > 40$	$Z_0 = \dfrac{S_1 - S_2}{S_p\sqrt{\frac{1}{2n_1} + \frac{1}{2n_2}}}$ $(*)$	rejeter H_0 si $Z_0 < -z_\alpha$	rejeter H_0 si $Z_0 > z_\alpha$	rejeter H_0 si $\lvert Z_0\rvert > z_{\alpha/2}$

$(*)$ $S_p = \sqrt{\dfrac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}$ $\quad (**)$ $\nu = \dfrac{(S_1^2/n_1 + S_2^2/n_2)^2}{\frac{(S_1^2/n_1)^2}{n_1+1} + \frac{(S_2^2/n_2)^2}{n_2+1}} - 2$ $\quad (***)$ $\overline{D} = \dfrac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} D_j,\ S_D = \sqrt{\dfrac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(D_j - \overline{D})^2}$

Les critères de rejet ci-dessus sont déterminés en considérant deux échantillons aléatoires $X_{11}, \ldots, X_{1n_1}$ et $X_{21}, \ldots, X_{2n_2}$, indépendants (sauf dans le cas des observations couplées), provenant de deux variables (populations) X_1 et X_2.

On considère: $\overline{X}_1 = \dfrac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1} X_{1i}$ $\quad \overline{X}_2 = \dfrac{1}{n_2}\sum_{i=1}^{n_2} X_{2i}$ $\quad S_1^2 = \dfrac{1}{n_1-1}\sum_{i=1}^{n_1}(X_{1i} - \overline{X}_1)^2$ $\quad S_2^2 = \dfrac{1}{n_2-1}\sum_{i=1}^{n_2}(X_{2i} - \overline{X}_2)^2$.

Calcul de β :

- Pour le test portant sur deux moyennes, $d = \dfrac{|\mu_1 - \mu_2|}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}$, et $\beta(d) = P\left(\text{accepter } H_0 \middle|\ |\mu_1 - \mu_2| = d\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}\right)$.

  On considère $n_1 = n_2 = n$ et on utilise les mêmes courbes (pages 490 et 491 du livre) que dans le cas d'une moyenne.