A) Un stationnement a en moyenne 2.362 places libres par heure. Si on suppose que le nombre de places libres pendant cet intervalle suit une loi de Poisson, quelle est la probabilité qu'un conducteur trouve une place de stationnement dans un intervalle d'une heure?

Soit X le nombre de places libres par heure dans le stationnement. On cherche à trouver la probabilité qu'il y ait au moins une place libre, c'est-à-dire $P(X \geq 1)$.

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \frac{e^{-2.362} 2.362^0}{0!} = \mathbf{0.906}$$

B) On mesure la vitesse de 457 véhicules sur une voie pendant une période de 5 heures et on obtient les résultats suivants :

Intervalle de vitesse (km/h)	%
0-20	0
20-40	6
40-60	10
60-80	33
80-100	39
100-120	12

a) Calculer la vitesse moyenne des véhicules

Il s'agit d'abord de calculer le nombre d'effectifs pour chaque catégorie de vitesses, c'est-à-dire le nombre de véhicules associés aux pourcentages donnés. Il faut ensuite prendre une valeur moyenne pour chaque intervalle (10, 30, 50, 70, et 110) :

Intervalle de vitesse	milieu	%	Nombre
0-20	10	0	0
20-40	30	6	27
40-60	50	10	46
60-80	70	33	151
80-100	90	39	178
100-120	110	12	55

La moyenne se calcule avec :

$$\bar{x} = \frac{10*0+30*27+50*46+70*151+90*178+110*55}{0+27+46+151+178+55} = \textbf{78.23 km/h}$$

b) Si la distribution suivait une loi Normale, quel devrait être le nombre de véhicules espérés associés à chacune des classes si l'écart type est de 20 km/h?

Soit X la vitesse d'un véhicule. On cherche à calculer $P(0 \leq X \leq 20)$, $P(20 \leq X \leq 40)$*, etc. si X suit la loi normale (centrée et réduite) :*

$$P(0 \leq X \leq 20) = P\left(\frac{0 - 78.23}{20} \leq Z \leq \frac{20 - 78.23}{20}\right) = \Phi(-2.91) - \Phi(-3.91) = 0.00176$$

Calcul des effectifs si la loi est normale

Intervalle de vitesse	Probabilité	Effectifs
0-20(-∞-20)	0.0018	0.82
20-40	0.0262	11.96
40-60	0.1530	69.94
60-80	0.3542	161.89
80-100	0.3265	149.23
100-120 (100-∞)	0.1381	63.15

c) Vérifier si la distribution suit une loi normale (hypothèse nulle, la distribution des vitesses suit la loi normale)

Effectuer un test d'ajustement du khi-carré, après avoir regroupé les deux premières catégories.

$$X^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} = 31.34$$

À comparer avec ${\chi^2}_{5-2-1}(0.05) = 5.99$

On rejette l'hypothèse que la distribution suit une loi Normale car

$$X^2 \; > \; {\chi^2}_2(0.05)$$

d) Calculer un intervalle de confiance sur la moyenne avec un seuil de 5%

À un niveau de confiance de 95%, la vitesse moyenne en ce point se situe dans l'intervalle : $\left[78.23 - 1.96 * \frac{20}{\sqrt{457}} \;,\; 78.23 + 1.96 * \frac{20}{\sqrt{457}}\right]$

f) L'échantillon prélevé est-il assez grand pour obtenir la vitesse à ±2 km/h avec un risque α=5% et un écart-type de 20 km/h ?

$n = \frac{k^2\sigma^2}{e^2} = \frac{1.96^2 20^2}{2^2} = 384.16$ → 385 → *L'échantillon de 457 prélèvements est assez grand.*

C) On décide d'implanter des panneaux d'arrêt dans un quartier résidentiel. On enregistre les vitesses des véhicules passant sur une rue, bornée par deux de ces panneaux.

Intervalle de vitesse	Sans	Avec
0-10	0	1
10-20	0	1
20-30	0	5
30-40	2	20
40-50	3	13
50-60	3	24
60-70	39	27
70-80	41	8
80-90	12	1

Vérifier si la vitesse moyenne a été diminuée significativement à un niveau de confiance de 95 %.

Les hypothèses du test à effectuer sont :

H_0 : les moyennes des vitesses moyennes avant μ_1 (échantillon 1) et après μ_2 (échantillon 2) sont égales

H_1 : la moyenne μ_2 est inférieure à la moyenne μ_1

La moyenne et l'écart type des échantillons doivent être calculés pour les deux distributions :

$$\bar{X}_1 = \frac{0*5+0*15+0*25+2*35+3*45+3*55+39*65+41*75+12*85}{100} = 70.0$$

$$\bar{X}_2 = \frac{1*5+1*15+5*25+20*35+13*45+24*55+27*65+8*75+1*85}{100} = 51.9$$

$$\sigma_1 = \sqrt{\frac{0*(5-\bar{X}_1)^2+0*(15-\bar{X}_1)^2+0*(25-\bar{X}_1)^2+2*(35-\bar{X}_1)^2+3*(45-\bar{X}_1)^2+3*(55-\bar{X}_1)^2+39*(65-\bar{X}_1)^2+41*(75-\bar{X}_1)^2+12*85^2}{99}} = 9.90$$

$$\sigma_2 = \sqrt{\frac{1*(5-\bar{X}_2)^2+1*(15-\bar{X}_2)^2+5*(25-\bar{X}_2)^2+20*(35-\bar{X}_2)^2+13*(45-\bar{X}_2)^2+24*(55-\bar{X}_2)^2+27*(65-\bar{X}_2)^2+8*(75-\bar{X}_2)^2+1*(85-\bar{X}_2)^2}{99}} = 15.48$$

Pour le test à effectuer, la variable de décision se calcule avec

$$Z = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{{\sigma_1}^2}{n} + \frac{{\sigma_2}^2}{n}}} = \frac{70.0 - 51.9}{\sqrt{\frac{9.90^2}{100} + \frac{15.48^2}{100}}} = 9.85$$

La statistique Z doit être comparée à $z_\alpha = z_{0.05} = 1.645$. *On rejettera H_0 si*

$$Z > z_\alpha = 1.645$$

Puisque $9.85 > 1.645$*, la vitesse moyenne de l'échantillon 2 est inférieure à celle de l'échantillon 1.*

D) Une enquête cordon réalisée auprès de 700 véhicules a révélé que la moyenne d'occupants par véhicules passant en un certain point d'étude vaut 1.488. Déterminer l'intervalle de confiance à 95 % sur la moyenne en supposant que l'écart-type est de 0.500 passagers.

La tolérance de l'intervalle de confiance se calcule avec

$$1.488 \pm 1.96 \cdot \frac{0.500}{\sqrt{700}}$$

La moyenne se trouve donc dans l'intervalle $[1.451,\ 1.525]$ *avec un niveau de confiance de 95 %.*

E) Le nombre de vélos disponibles à une station BIXI de la ville de Montréal est compté à chaque heure de la journée.

Heure	Nombre de vélos disponibles
0:00	33
1:00	33
2:00	33
3:00	33
4:00	32
5:00	32
6:00	32
7:00	26
8:00	25
9:00	25
10:00	26
11:00	24
12:00	23
13:00	23
14:00	25
15:00	28
16:00	31
17:00	33
18:00	33
19:00	32
20:00	30
21:00	31

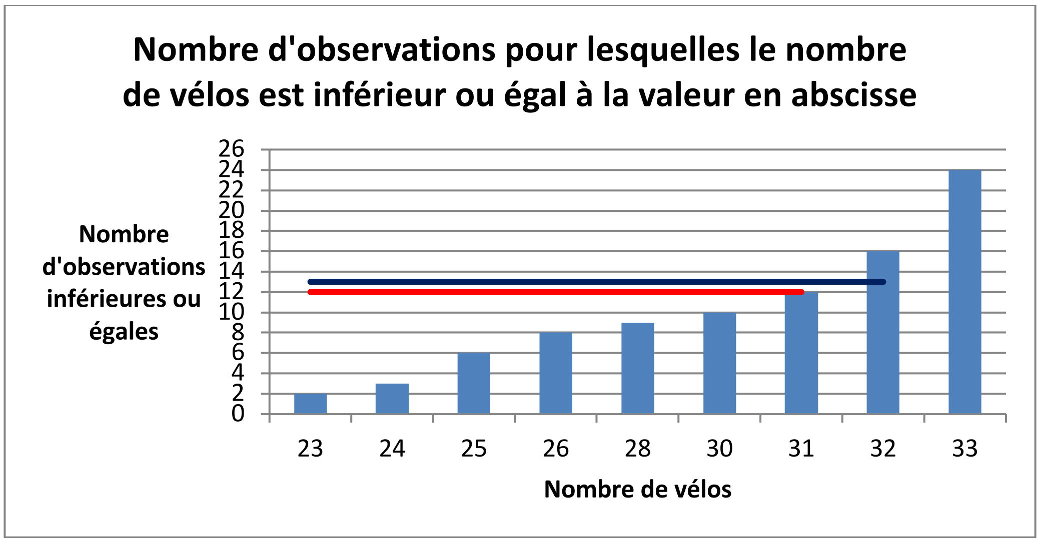
22:00	33
23:00	33

a) Calculer le nombre moyen de vélos disponibles par heure dans une période de 24 heures.

$\bar{x}$ =29.54 vélos

b) Quelle est la médiane de cette distribution?

Puisqu'il y a 24 données, la médiane se trouve entre les 12^e et 13^e valeurs, une fois que celles-ci sont classées en ordre croissant.



La 12^e valeur vaut 31 et la 13^e, 32. La médiane vaut donc 31.5 vélos.

c) Calculer l'écart-type de la distribution.

L'écart type est calculé avec la formule

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2}{n-1} - \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n-1}\right)^2}$$

L'écart type est de 3.71 vélos.

d) Si la borne contient 33 places et que le nombre de places libres suit une loi de Poisson, quelle est la probabilité qu'un membre puisse rapporter son vélo à cette borne-ci au courant de la journée?

Soit X le nombre de vélos disponibles à la borne. Puisque la borne a 33 places, le nombre d'espaces vacants Y (Y=33-X) moyen dans la journée est de 3.46.

La probabilité qu'il y ait au moins une place libre se calcule ainsi :

$$P(Y \geq 1) = \sum_{i=1}^{i=33} P(Y = i) = 1 - P(Y = 0) = 1 - \frac{e^{-3.46} 3.46^0}{0!} = 0.97$$

F) Les résidents d'un quartier résidentiel portent plainte contre les excès de vitesse faits par les véhicules y circulant. Ils demandent d'installer des dos d'ânes ou des panneaux d'arrêts afin de forcer les véhicules à ralentir dans leur quartier. On installe à priori un tube pneumatique afin de recueillir les vitesses sur une rue avant toute intervention. On installe ensuite des ralentisseurs temporaires et on mesure à nouveau la vitesse des véhicules. Considérer un seuil de confiance à α=5 % pour les tests statistiques.

	Vitesse AVANT	Vitesse APRÈS
MOYENNE	47.259	36.097
ÉCART	9.311	7.093
NOMBRE D'OBSERVATIONS	52	51

a) Pour quelle taille d'échantillon l'erreur faite sur la moyenne AVANT serait-elle inférieure à 2 km/h?

$n = \frac{1.96^2 * 9.311^2}{2^2} = 83.26$, *soit n=84 observations*

b) Pour quelle taille d'échantillon l'erreur faite sur la moyenne APRÈS serait-elle inférieure à 2 km/h?

On obtient n=49 observations

c) Les deux échantillons sont-ils assez grands?

L'échantillon AVANT n'est pas assez grand
L'échantillon APRÈS est assez grand

d) Serait-il efficace d'installer des dos d'ânes permanents à cet endroit?

Il s'agit de vérifier si les ralentisseurs ont eu un impact sur la circulation à cet endroit. Il faut donc effectuer un test d'hypothèses sur les moyennes.

Les hypothèses du test à effectuer sont :
H_0 : les moyennes «avant» $\bar{X}_1$ et «après» $\bar{X}_2$ sont égales
H_1 : la moyenne «après» $\bar{X}_2$ est inférieure, à la moyenne «avant» $\bar{X}_1$

Calcul de la variable de décision :

$$Z = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{{\sigma_1}^2}{n} + \frac{{\sigma_2}^2}{n}}} = \frac{47.259 - 36.097}{\sqrt{\frac{9.311^2}{52} + \frac{7.093^2}{51}}} = 6.625$$

On rejettera H_0 si $Z > z_\alpha$

Dans ce cas-ci, $z_\alpha = 1.645$ est inférieure à 6.625. On rejette l'hypothèse H_0; la moyenne «après» est significativement inférieure à la moyenne «avant». La probabilité qu'une variable suivant la loi normale soit inférieure à 6.625 dépasse 95%. Selon cette expérimentation, implanter des dos d'ânes permanents à cet endroit est une intervention efficace pour réduire la vitesse des véhicules.

G) Des boucles électromagnétiques installées dans la chaussée mesurent la vitesse des véhicules en un point. Le tableau suivant montre la distribution des vitesses des véhicules qui y sont passés en une semaine.

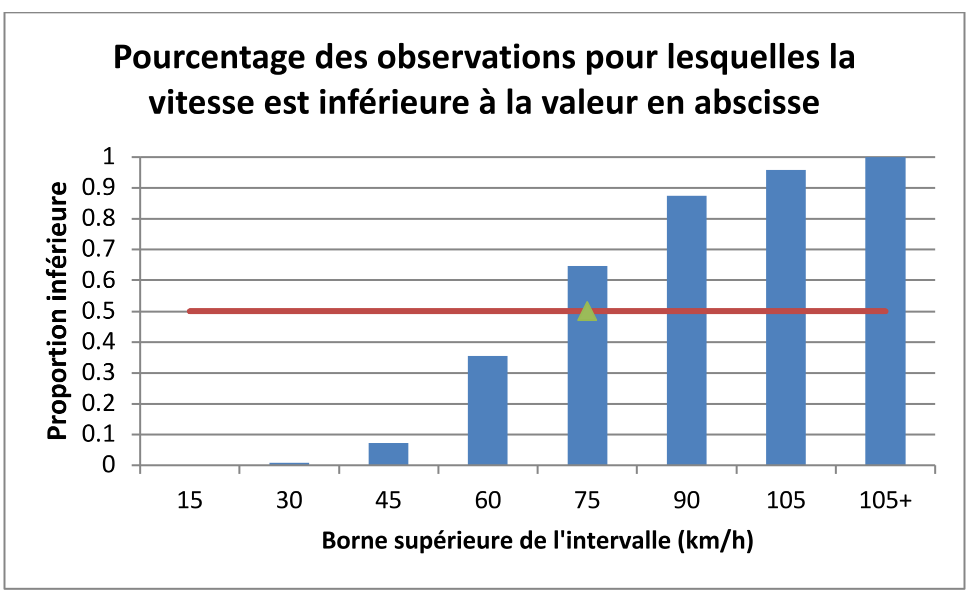
Intervalles de vitesses (km/h)	Nombre de véhicules
0-15	13
15-30	97
30-45	428
45-60	441
60-75	343
75-90	127
90-105	62
105+	1

a) Calculer la moyenne, la médiane et l'écart-type de la vitesse en ce point.

MOYENNE : La vitesse moyenne $\bar{X}$ est calculée en utilisant une valeur moyenne pour chaque intervalle (7.5, 22.5, 37.5, 52.5, 67.5, 82.5, 97.5, 112.5).

$$\bar{X} = \frac{13 * 7.5 + 97 * 22.5 + 428 * 37.5 + \cdots}{1512} = 53.75\ km/h$$

MÉDIANE : Puisqu'il y a 1512 vitesses recueillies au total, la médiane de cette distribution se trouve entre les 756^{e} et 757^{e} données.



Puisque ces deux éléments se trouvent dans l'intervalle 45-60 km/h, la médiane se situe entre 45 et 60 km/h.

ÉCART TYPE : L'écart type est calculé avec la formule :

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2}}{n-1} - \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n-1}\right)^2}$$

Il vaut 18.69 km/h.

b) Y a-t-il des raisons de considérer que cette distribution obéit à une loi normale ?

Il s'agit de *trouver les fréquences théoriques pour chacun des intervalles (centrer et réduire pour utiliser les tables de la loi normale).*

Intervalles	*Nombre de véhicules observés*	*Fréquence théorique*	*Espérés (Loi Normale)*
0-15	*13*	*0.017*	28.84
15-30	*97*	*0.083*	*125.25*
30-45	*428*	*0.218*	*329.50*
45-60	*441*	*0.311*	*470.43*
60-75	*343*	*0.241*	*364.79*
75-90	*127*	*0.102*	*153.55*
90-105	*62*	*0.023*	*35.03*
105+	*1*	*0.003*	*4.62*

On effectue ensuite un test d'ajustement du khi-carré. Il faut regrouper les deux dernières catégories pour avoir au moins cinq observations.

La variable de décision vaut

$$X^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} = 66.02$$

Pour que la loi soit acceptée, il faut que $X^2 < \chi^2{}_{7-p-1}$ *avec p=2 pour la loi normale*

On trouve $\chi^2{}_4(0.05) = 9.49$

On rejette l'hypothèse que la distribution des vitesses suit une loi normale à un niveau de confiance d'au moins 95 %.