Chapitre 1

La différentielle

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $]a, b[$et soit $x \in]a, b[$ Lorsqu'on fait subir à x un accroissement, c'est-à-dire lorsqu'on passe de x à $x + dx$, cela entraîne un accroissement $\Delta\ y$ (ou Δf) le long de la courbe de la fonction qui est donné par :

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

Lorsqu'on fait subir à x un accroissement dx (appelé la différentielle de f), c'est à-dire lorsqu'on passe de x à x + dx, cela entraîne un accroissement dy (ou df) le long de la tangente à la courbe de la fonction f au point $(x, f(x))$, Cet accroissement tangentiel dy est appelé **la différentielle** de la fonction f.

Chapitre 1: Intégration (2)

Le département de mathématiques et de génie industriel (MAGI)

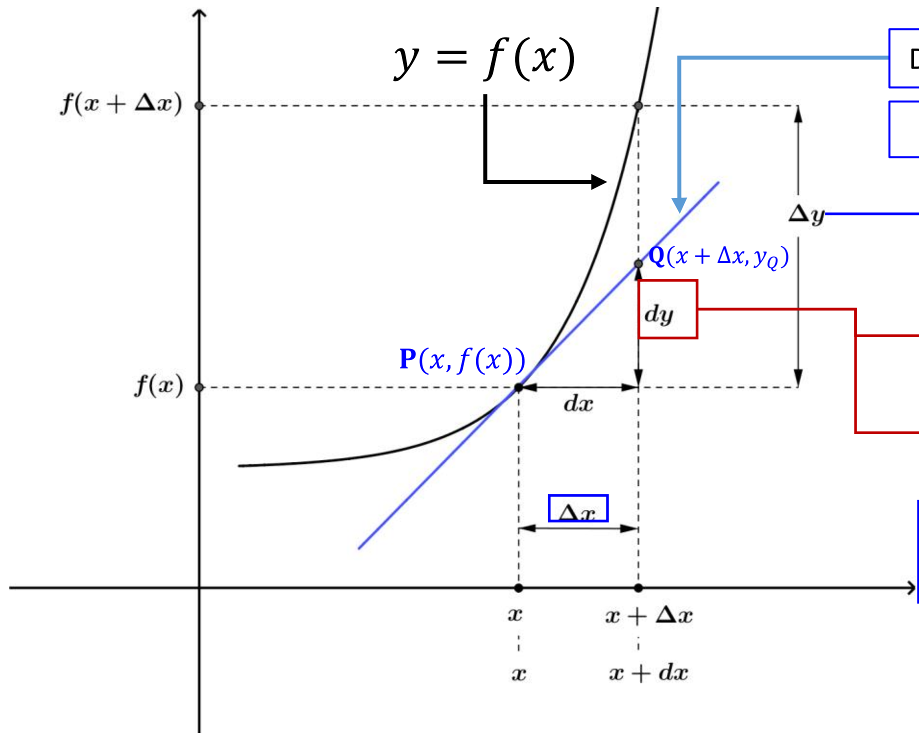
La différentielle

Intérêt pratique

- Méthode d'approximation
- Calcul d'erreur

Intérêt théorique

- Application de calcul intégral



Droite tangente de pente $f'(x)$

$f'(x) = \frac{dy}{dx}$

$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$

La différentielle

$$dy = f'(x)\Delta x$$

Accroissement **tangentiel**

Notation de Leibnitz $f'(x) = \dfrac{dy}{dx}$ (MTH0101)

$$dy = f'(x)dx$$

Si Δx *et* dx sont petits petit(subjectif) alors $\Delta y \approx dy$

Propriétés de la différentielle

- La différentielle et la dérivée sont deux notions très proches l'une de l'autre.
- La majorité des propositions et formules relatives à la dérivée sont valables pour la différentielle.

Soit $u = u(x)$ et $v = v(x)$

1. $d(u \pm v) = du \pm dv$
2. $d(uv) = vdu + udv$
3. $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$
4. $y = f(u)$ et $u = g(x)$ alors $dy = f'(u)du$

Par la règle de dérivation en chaîne

Propriété d'invariabilité de la différentielle

- La différentielle d'une fonction composée s'exprime de la même manière que si la variable intermédiaire u était une variable indépendante.

⇨ La différentielle d'une fonction f ne dépend pas du fait que x est une variable indépendante ou une fonction d'une autre variable.

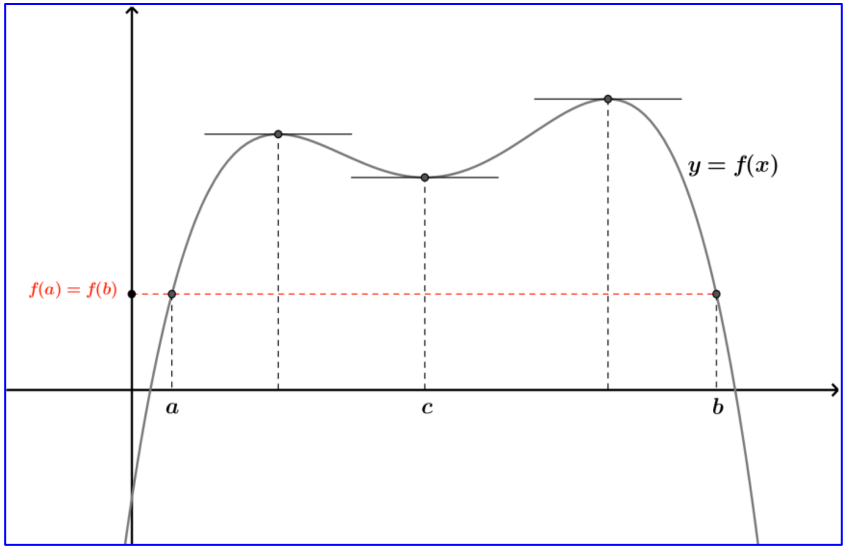
1. $d(u^n) = nu^{n-1}du$
2. $d(e^u) = e^u du$
3. $d(\ln(u)) = \frac{1}{u}du$

Largement utilisée dans la méthode de changement de variable

Théorèmes des fonctions continues

Théorème de Rolle

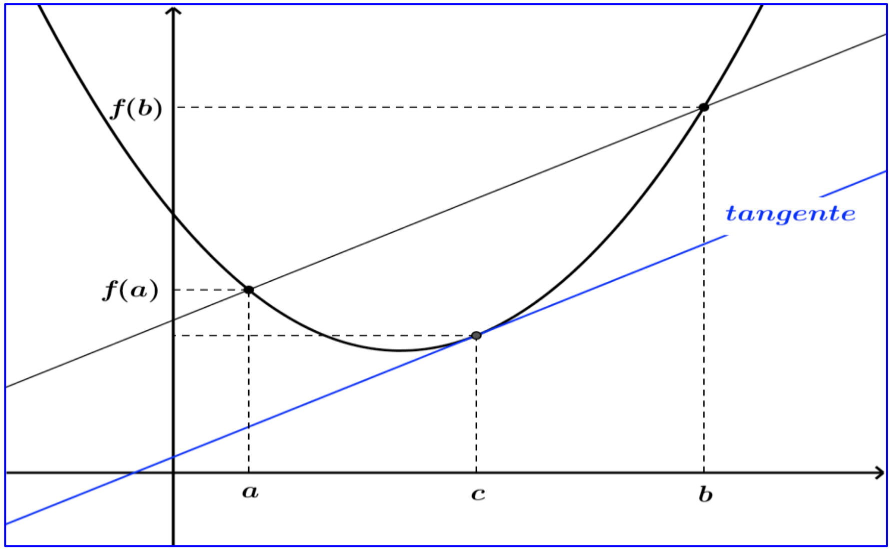
Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.
Si $f(a) = f(b)$, il existe alors au moins un nombre $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$



Il existe au moins un nombre $c \in]a, b[$ pour lequel la tangente à la courbe au point $(c, f(c))$ est horizontale

Théorème de Lagrange (ou théorème de la moyenne)

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.
Il existe au moins un nombre $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$



Il existe au moins un nombre $c \in]a, b[$ pour lequel la tangente à la courbe au point $(c, f(c))$ *est* parallèle à la sécante passant par les points $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$

Chapitre 1: Intégration (5)

Théorèmes des fonctions continues

Théorème de la dérivée nulle (Corollaire 1)

Soit f une fonction continue sur [*a, b*] et dérivable sur $]a, b[$.
Si $f'(x) = 0$ pour tout $x \in]a, b[$ alors la fonction f est constant sur $[a, b]$.

Théorème de de la différence constante (Corollaire 2)

Soit f et g deux fonctions continues sur [*a, b*] et dérivable sur $]a, b[$. Si $f'(x) = g'(x)$ pour tout $x \in]a, b[$, il existe alors une constante C telle que $f(x) = g(x) + C, \forall x \in [a, b]$. On dit alors que les deux fonctions f et g ne diffèrent que par une constante sur $[a, b]$"

Règle de l'Hospital

Soit f et g deux fonctions dérivables dans le voisinage d'une valeur *a* ,
$\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ est une forme indéterminée $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$ alors $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (si cette limite $\exists$)

le résultat s'applique également aux limites à gauche, aux limites à droite et aux limites à l'infini.

Chapitre 2

Chapitre 2: Intégration: les bases (1)

Définition: Intégrale indéfinie

L'ensemble de toutes les primitives d'une fonction f sera appelé l'intégrale indéfinie de la fonction f (ou simplement l'intégrale de f) et sera désigné par la notation suivante: $\int f(x)dx$

F est une primitive de la fonction f on pourra alors écrire $\int f(x)dx = F(x) + C$ pour définir l'intégrale de la fonction

Quelques propriétés de l'intégrale indéfinie

1. $\int k.f(x)dx = k.\int f(x)dx$
2. $\int \big(f(x) + g(x)\big)\, dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$
3. $\int \big(f(x) - g(x)\big)\, dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$

Formules d'intégration

Consulter document:
formules d'intégration

Chapitre 2: Intégration: les bases (2)

Intégration par changement de variable

Formules d'intégration

G est une primitive de la fonction g alors

$$\int g(f(x))dx = G(f(x)) + C$$

La procédure d'intégration

1.Identifier u $= f(x)$
2.Calculer du $= f'(x)dx$
3 .Exprimer l'intégrale selon la nouvelle variable

$$\int g(f(x))f'(x)dx = \int g(u)du$$

4.Intégrer par rapport à u
5. Exprimer le résultat en fonction de la variable originale x

Formules d'intégration

Consulter document: formules d'intégration

Chapitre 2: Équations différentielles

Équations différentielles

Une équation différentielle (ED) est une équation de la forme $F(x, y, y', y'', .. y^{(n)})$=0

- une fonction y
- la variable indépendante x
- Les dérivées de y

L'ordre d'une ED est l'ordre le plus élevé des dérivées qui apparaissent dans l'équation.

Une solution à une ED est une fonction qui vérifie l'ED.

Équation différentielle à variables séparables

Une ED à variables séparables est de la forme $y' = \frac{P(x)}{Q(y)}$

Résoudre

1. Réécrire l'équation sous la forme $Q(y)\mathrm{d}y = P(x)dx$.
2. Intégrer de chaque côté $Q(y)\mathrm{d}y = P(x)dx$
3. Si possible, isoler y l'équation résultant de l'étape précédente.
4. Si c'est possible trouver la solution est sous forme explicite

- Solution générale
- Solution particulière

Chapitre 3

Chapitre 3: Techniques d'intégration (1)

Techniques d'intégration

Intégration par parties

Soit u et v deux fonctions dérivables par rapport à la variable x .

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Intégration des fonctions trigonométriques

Utiliser les identités trigonométriques et les formules d'intégration

Intégration par décomposition en fractions partielles

La méthode d'intégration par décomposition en fractions partielles s'utilise seulement pour des intégrales de la forme: $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$ Où $P(x)$ et $Q(x)$ sont des polynômes de degrés p et q respectivement

Suite

Intégration par décomposition en fractions partielles

La méthode d'intégration par décomposition en fractions partielles s'utilise seulement pour des intégrales de la forme: $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$ Où $P(x)$ et $Q(x)$ sont des polynômes de degrés p et q respectivement

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$$

Diviser les deux polynômes
$\frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \boxed{\frac{R(x)}{Q(x)}}$

$\mathrm{p} < q$
Fraction propre

Factoriser complètement le dénominateur $Q(x)$

Un produit de facteurs linéaires
$ax + b$

$\frac{A_1}{ax+b} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \frac{A_3}{(ax+b)^3} + \ldots + \frac{A_n}{(ax+b)^n}$

Facteurs quadratiques irréductibles
$ax^2 + bx + c$ ou $b^2 - 4ac < 0$

$\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c} + \frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2} + \frac{A_3x+B_3}{(ax^2+bx+c)^3} + \ldots + \frac{A_nx+B_n}{(ax^2+bx+c)^n}$

Déterminer les facteurs $A_1, B_1, A_2, \; B_2 \ldots\ldots A_n, B_n$

Méthode générale

Système des équations à résoudre

Méthode simplifiée

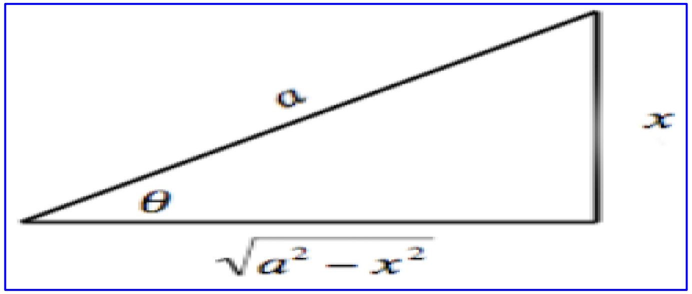
Utiliser les valeurs qui annulent les facteurs

Chapitre 3: Techniques d'intégration (3)

Intégration par substitutions trigonométriques

1. Trouver les côtés d'un triangle rectangle permettant de mettre en relation un angle θ et les différentes parties de l'intégrale
2. Trouver les fonctions trigonométriques permettant de réécrire l'intégrale en fonction de θ;
3. Réécrire l'intégrale;
4. Intégrer la nouvelle expression de l'intégrale;
5. Revenir en x à l'aide de relation de Pythagore tirée du triangle .

Forme	***Changement de variable***
$\sqrt{a^2 - b^2x^2}$	$x = \frac{a}{b}\sin(\theta)$
$\sqrt{a^2 + b^2x^2}$	$x = \frac{a}{b}\tan(\theta)$
$\sqrt{b^2x^2 - a^2}$	$x = \frac{a}{b}\sec(\theta)$



Identités trigonométriques

$$\sec^2(\theta) = 1 + \tan^2(\theta)$$

$$\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$$

Chapitre 4

Chapitre 4: Intégrale définie (1)

Notion de Sommation

1. $\sum_{i=1}^{n} ca_i = c\sum_{i=1}^{n} a_i$
2. $\sum_{i=1}^{n} a_i + b_i = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$
3. $\sum_{i=1}^{n} c = nc$
4. $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$
5. $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Somme de Riemann

Soit f une fonction définie sur $[a,b]$

1- Trouver la largeur des rectangles Δx_i

→ Subdiviser l'intervalle $[a,b]$ en n sous-intervalles de même largeur $\Delta x_i = \frac{b-a}{n}$

2- Hauteur des rectangles $f(c_i)$

→ Dans chaque sous intervalle$[x_{i-1}, x_i]$ on choisi une représentant c_i → $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$

- c_i *borne supérieure de* $[x_{i-1}, x_i]$→ $c_i = a + i\left(\frac{b-a}{n}\right)$
- c_i *borne* inférieure *de* $[x_{i-1}, x_i]$→ $c_i = a + (i-1)\left(\frac{b-a}{n}\right)$
- c_i *point milieu* *de* $[x_{i-1}, x_i]$→ $c_i = a + (2i-1)\mathrm{i}\left(\frac{b-a}{2n}\right)$

$$\sum_{i=1}^{n} A_i = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$$

Est la somme de Riemann → elle permet d'approximer l'aire sous la courbe

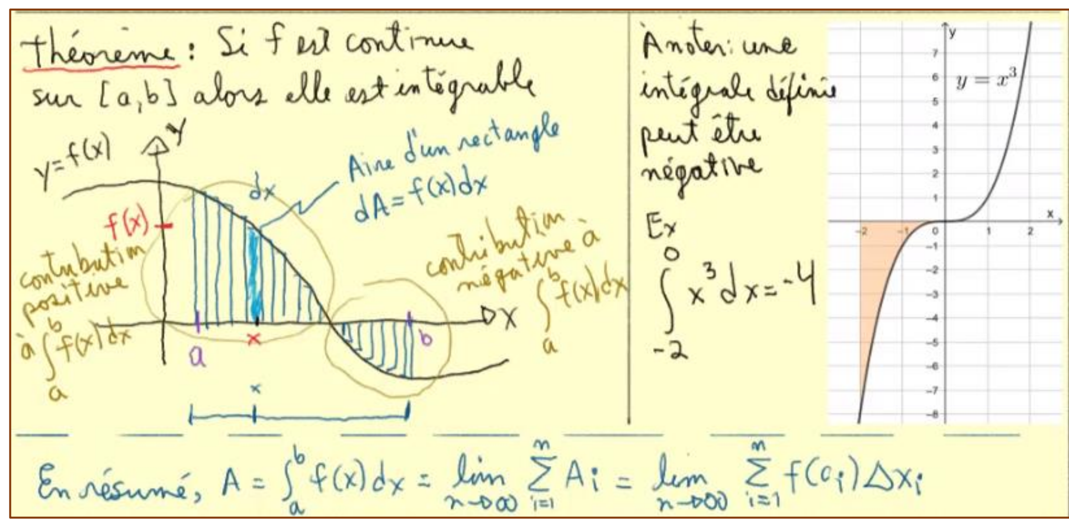
Aire sous la courbe d'une fonction

Aire sous la courbe d'une fonction:

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$$

f est continue sur $[a, b]$ alors f est dite intégrable sur $[a, b]$.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = A$$



(*) https://formulemath.thinkific.com

Chapitre 4: Intégrale définie (3)

Théorème fondamental de l'intégrale définie

Si f est une fonction continue sur l'intervalle [a , b] alors:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

où F est une primitive de la fonction f

Chapitre 4: Intégrale impropre (1)

Définition: Intégrale impropre

L'intégrale définie $\int_a^b f(x)dx$ est dite intégrale **impropre** si

a. Si f possède au moins un point de discontinuité sur [a , b]

Et/ ou

b. au moins une borne d'intégration est infinie

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{M\to+\infty}\int_a^M f(x)dx$$

Si cette limite existe (si elle donne un nombre réel), on dit alors que l'intégrale impropre $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ **converge**

Si cette limite donne $\pm\infty$ ou n'existe pas, on dit alors que l'intégrale impropre $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ **diverge**

$$\int_{-\infty}^{\mathrm{b}} f(x)dx = \lim_{N\to-\infty}\int_{\mathrm{N}}^b f(x)dx$$

Si cette limite existe (si elle donne un nombre réel), on dit alors que l'intégrale impropre $\int_{-\infty}^{\mathrm{b}} f(x)dx$ **converge**

Si cette limite donne $\pm\infty$ ou n'existe pas, on dit alors que l'intégrale impropre $\int_{-\infty}^{\mathrm{b}} f(x)dx$ **diverge**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{N\to-\infty}\int_{\mathrm{N}}^a f(x)dx + \lim_{M\to+\infty}\int_a^M f(x)dx$$

Lorsque $\int_{-\infty}^{a} f(x)dx$ ***et*** $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ **convergent toutes les deux** ,on dira que que l'intégrale impropre $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ **converge**

Lorsque $\int_{-\infty}^{a} f(x)dx$ ***ou*** $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ **diverge**,on dira que que l'intégrale impropre $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ **diverge**

Chapitre 4: Intégrale impropre (2)

Intégrale impropre avec des fonctions non bornées

Une fonction f est non bornée en *c* si elle prend des valeurs arbitrairement grandes au voisinage de la valeur c.

cela signifie que la droite *x* = *c* est une asymptote verticale.

Si f est non bornée en c, l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ calculée à partir des sommes de Riemann n'est pas définie car seules les fonctions bornées sont intégrables. Toutefois, il est possible dans certains cas de définir $\int_a^b f(x)dx$ comme une intégrale impropre.

Si f est non bornée en a alors $\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to a^+} \int_{\mathrm{t}}^b f(x)dx$ (si la limite existe). On dit que l'intégrale impropre **converge** ; sinon elle **diverge**

Si f est non bornée en b alors $\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to b^-} \int_{\mathrm{a}}^t f(x)dx$ (si la limite existe). On dit que l'intégrale impropre **converge** ; sinon elle **diverge**

Si on ne peut pas calculer l'intégrale

Théorème : Soit f et g deux fonctions continues sur $[a, +\infty[$ telles que $0 \le f\ (x) \le\ g(x), \forall\ x \in [a, +\infty[$

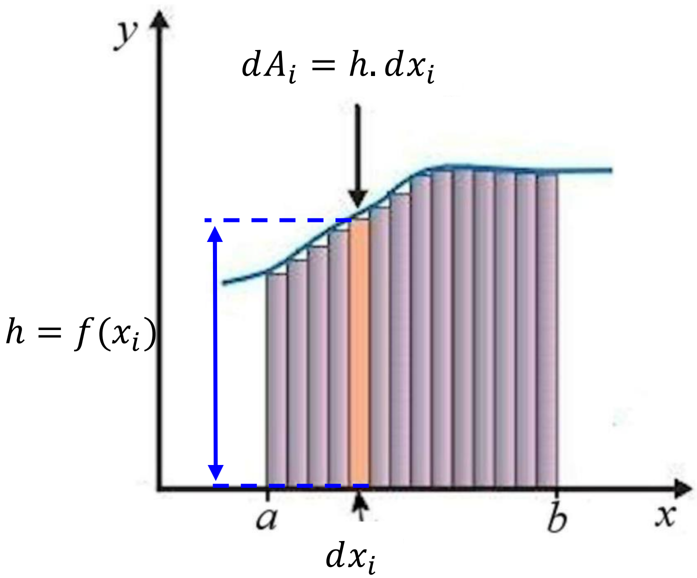
- Si $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ est convergente, alors $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ est convergente
- Si $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ est divergente, alors $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ est divergente

Chapitre 5

Chapitre 5: Calcul d'aire et de volume (1)

Calcul d'aire

On sait que l'intégrale définie de f sur un intervalle [a , b] correspond à l'aire de la région sous la courbe de f au-dessus de l'intervalle [a , b] à la condition que la fonction f soit positive sur [a , b]



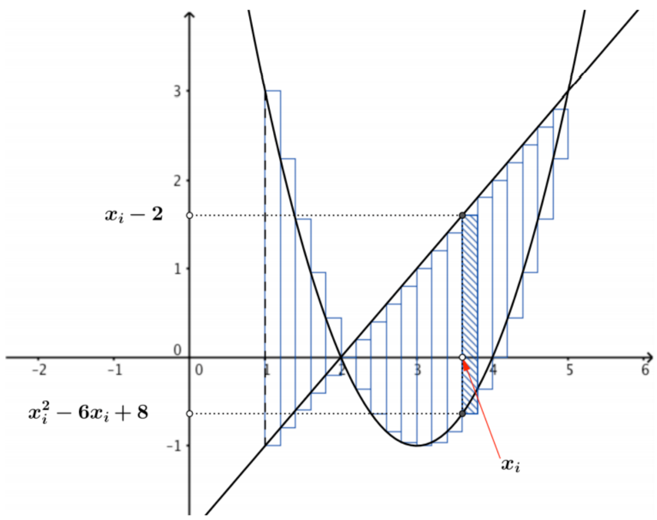
$$A = \int_a^b f(x)dx$$

Chapitre 5: Calcul d'aire et de volume (1)

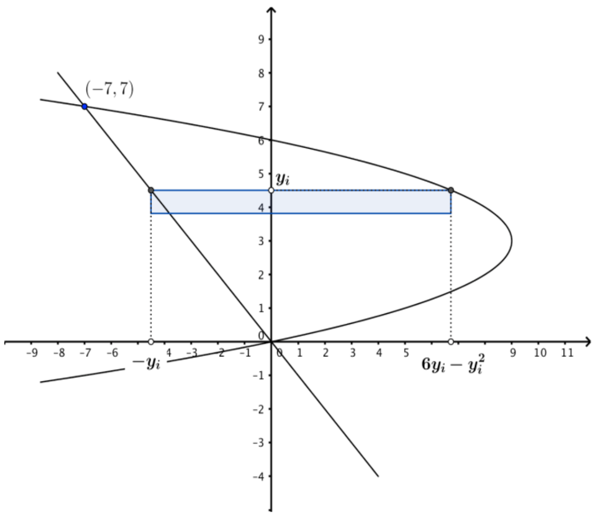
Calcul d'aire entre deux courbes

1. Déterminer les points d'intersection
   a. Factoriser l'équation
   b. Trouver les racines
2. Identifier le nombre des régions
3. Identifier la méthode de découpage (horizontale ou verticale) pour chaque région
4. Déterminer l'aire d'un rectangle élémentaire pour chaque région (selon la méthode découpage)

Découpage verticale



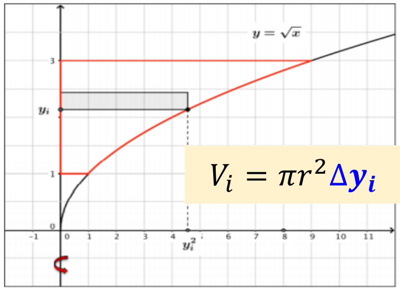
Découpage horizontal



Calcul de volume (un solide de révolution)

Méthode des disques

- Afin d'évaluer le volume d'un solide de révolution, on construit une série de rectangles **perpendiculaires à l'axe de rotation** qui couvrent la surface en rotation.
- Par rotation, chacun de ces rectangles engendre un disque.
- Lorsque le nombre n de rectangles augmente, les disques occupent de mieux en mieux le volume du solide.
- Lorsque n → $+\infty$, on obtient alors le volume (exact) du solide



Les étapes

1. Déterminer le volume du ième disque:

Disque plein: $V_i = \pi r^2 \Delta \boldsymbol{x_i}$ (ou bien $V_i = \pi r^2 \Delta \boldsymbol{y_i}$)

Disque troué: $V_i = \pi (R^2 - r^2) \Delta \boldsymbol{x_i}$ (ou bien $V_i = \pi (R^2 - r^2) \Delta \boldsymbol{y_i}$)

2. Déterminer r (et R) en fonction de $\boldsymbol{x_i}$ (ou bien en fonction de $\boldsymbol{y_i}$)

3. Determiner Les volumes des n disques $V_{ndisques} = \sum_{i=1}^{n} \pi r^2 \Delta \boldsymbol{x_i}$ (ou bien $V_n = \sum_{i=1}^{n} \pi r^2 \Delta \boldsymbol{y_i}$)

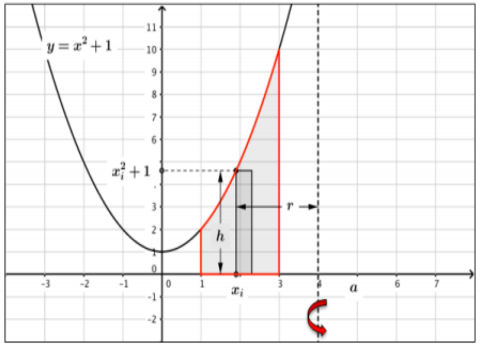
4. Calculer le volume intégral (ou exact) du solide $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \pi r^2 \Delta \boldsymbol{x_i}$ (ou bien $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \pi r^2 \Delta \boldsymbol{y_i}$)

Chapitre 5: Calcul d'aire et de volume (3)

Calcul de volume (un solide de révolution)

Méthode des tubes (ou des coquilles cylindriques)

- Afin d'évaluer le volume d'un solide de révolution, on construit une série de rectangles **parallèles à l'axe de rotation** qui couvrent la surface en rotation.
- Par rotation, chacun de ces rectangles engendre un « tube cylindrique ».
- Lorsque le nombre n de rectangles augmente, les tubes (insérés les uns dans les autres) occupent de mieux en mieux le volume du solide.
- Lorsque n → $+\infty$, on obtient alors le volume (exact) du solide.



Les étapes

1. Déterminer le volume du ième tube: $V_i = 2\pi r h \Delta \boldsymbol{x_i}$ (ou bien $V_i = 2\pi r h \Delta \boldsymbol{y_i}$)
2. Déterminer r et h en fonction de $\boldsymbol{x_i}$ (ou bien en fonction de $\boldsymbol{y_i}$)
3. Determiner les volumes des n tubes $V_{ntubes} = \sum_{i=1}^{n} 2\pi r h \Delta \boldsymbol{x_i}$ (ou bien $V_n = \sum_{i=1}^{n} \pi r^2 \Delta \boldsymbol{y_i}$)
4. Calculer le volume intégral (ou exact) du solide $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 2\pi r h \Delta \boldsymbol{x_i}$ (ou bien $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \pi r^2 \Delta \boldsymbol{y_i}$)

Longueur d'un arc de courbe

$$L = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \Delta l_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1+(f'(x))^2}\Delta x_i = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}dx$$

La seule condition à respecter pour utiliser cette démarche c'est de s'assurer que la dérivée f' est continue sur l'intervalle considéré.
En effet, si f' est continue sur l'intervalle [a , b] alors la fonction $\sqrt{1+(f'(x))^2}$ sera elle aussi continue sur [a , b] et on pourra alors utiliser le théorème fondamental du calcul pour évaluer l'intégrale $\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}dx$.

Chapitre 6

Chapitre 6: Suites et séries (1)

Suites infinies

Une suite infinie de nombres réels $\{a_n\}$= $\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots\}$ est un ensemble de nombres où
a_1: est le premier terme de la suite
a_2: est le deuxième terme de la suite
.
.
a_n: est le n-ième terme de la suite

- On dit que la suite $\{a_n\}$ converge vers L lorsque $\lim_{n\to\infty} a_n = L$
- $\lim_{n\to\infty} a_n = \mp\infty$ ouà lorsque $\lim_{n\to\infty} a_n$ n'existe pas, on dit alors que la suite $\{a_n\}$ diverge.

Séries infinies

Soit $\{a_n\}$= $\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots\}$ une suite.

- somme infinie $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$ est appelée **série infinie**
- Le n-ième terme de la série, a_n , est appel le terme **général de la série**
- La somme des n premiers termes d'une série est notée S_n et est appelée la n-ième somme partielle de la série

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

- La suite $\{S_n\}$ =$\{S_1, S_2, S_3, \dots, S_n, \dots\}$ est appelée **la suite des sommes partielles** de la série $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$
- La série $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ converge si la suite des sommes partielles $\{S_n\}$ converge ; c'est–à–dire si $\lim_{n\to\infty} S_n = S$.
- Le nombre réel S est appelé la somme de la série et on écrit $\sum_{i=1}^{n} a_i$=S
- La série $\sum_{i=1}^{n} a_i$ diverge si la suite des sommes partielles $\{S_n\}$diverge.

Chapitre 6: Suites et séries (2a)

Suites

Théorème : (sandwich pour les suites)

Soit $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ et $\{c_n\}$, des suites tells que $a_n \leq c_n \leq b_n$, pour tout $n \geq m$ où $m \in \mathbb{N}$.

- Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ et $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = L \Rightarrow$ alors $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = L$

Suites bornées et suites monotones

Une suite a_n où $n \in \mathbb{N}$ est :

- **croissante** si $a_n \leq a_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$
- **décroissante** si $a_n \geq a_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$
- **monotone** si elle est croissante ou décroissante

Remarque: Parfois, il est possible d'utiliser la dérivée de la fonction f où $x \in [1, +\infty[$, pour determiner la croissance ou la décroissance de la suite $\{a_n\}$, où $f(n) = a_n$

Définition: La suite a_n, où $n \in \mathbb{N}$ est

- **bornée supérieurement**: si $\exists\, M \in \mathbb{R}$, tel que $a_n \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$
  $\Rightarrow$Nous dirons que M, est ***un majorant***
  $\Rightarrow$Nous appelons ***borne supérieure,*** notée B, le plus petit des majorants

- **bornée inférieurement**: si $\exists\, m \in \mathbb{R}$, tel que $a_n \geq m$, $\forall n \in \mathbb{N}$
  $\Rightarrow$Nous dirons que m, est ***un minorant***
  $\Rightarrow$Nous appelons ***borne inférieure,*** notée b, le plus grand des minorants.

- **bornée** si elle est bornée inférieurement et supérieurement.

Soit une suite $\{a_n\}$:

1. Si la suite $\{a_n\}$ converge , alors la suite est bornée

2. Si la suite $\{a_n\}$ est non bornée. alors la suite diverge

Suites

❑ **bornée** si elle est bornée inférieurement et supérieurement.

Soit une suite $\{a_n\}$:

1. Si la suite $\{a_n\}$ converge , alors la suite est bornée

2. Si la suite $\{a_n\}$ est non bornée. alors la suite diverge

Soit la suite $\{a_n\}$ est monotone et bornée, alors la suite $\{a_n\}$ converge.

1. Si la suite $\{a_n\}$ est <u>croissante et bornée supérieurement</u>, → La suite $\{a_n\}$ converge vers la borne supérieure B.

2. Si la suite $\{a_n\}$ est <u>décroissante et bornée inférieurement</u>, → la suite $\{a_n\}$ converge vers la borne inférieure b.

Différents types des séries

Série géométrique

Une série de la forme $\sum_{i=1}^{\infty} a_i\, r^{i-1} = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots$ est appelée **une série géométrique** de premier terme a et de raison r.

Ce qui caractérise une série géométrique c'est que le rapport de deux termes consécutifs $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ est constant et égal à r.

- ❑ converge si $|r| < 1$et dans ce cas, $\sum_{i=1}^{\infty} a_i\, r^{i-1} = \frac{a}{1-r}$
- ❑ diverge si $|r| \geq 1$

Autre forme de la série géométrique

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i\, r^{i-1} = a(1 + r + r^2 + r^3 + \cdots r^{n-1} + ..) = a\sum_{i=1}^{\infty} r^{i-1}$$
$$= a\sum_{i=0}^{\infty} r^{n}$$

Séries de Riemann ou Séries-p

Une série de la forme $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$est appelée série de Riemann ou série-p

- ❑ Lorsque p = 1 la série est appelée série harmonique.
- ❑ Une série de Riemann $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ converge si p > 1et diverge si p ≤ 1

La fonction réelle f associée à la suite $\left\{\frac{1}{k^p}\right\}$ est la fonction $f(x) = \frac{1}{x^p}$ et que l'intégrale impropre $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}$ converge vers $\frac{1}{p-1}$ lorsque p > 1

Rappel: $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\, dx = \begin{cases} +\infty \; si\; p \leq 1 \\ \frac{1}{p-1} \; si\; p > 1 \end{cases}$

Chapitre 6: Suites et séries (4)

Différents types des séries

Série harmonique

La série de la forme $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$est un cas particulier de série-p ou le p=1. Elle est appelée la série harmonique.

- Comme le p=1 n'est pas supérieur à 1, la série harmonique $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ est donc divergente.

Série alternées

Une série de la forme
$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k a_k = -a_1 + a_2 - a_3 + \cdots$où $a_k > 0$ ou encore
$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1} a_k = a_1 - a_2 + a_3 + \cdots$où $a_k > 0$ est appelée : série alternée

Séries arithmétique

Une série de la forme $\sum_{k=1}^{\infty}(a + (k-1)d)$ c'est à dire: $a + (a+d) + (a+2d) + (a+3d) + \cdots + (a + (n-1)d) + \cdots$, $ou\ a \in \mathbb{R}\ et\ d \in \mathbb{R}$ est appelée série arithmétique de premier terme a et de raison d

- 1.La somme partielle S_n des n premiers terme de la série est donnée par : $S_n = na + \frac{n(n-1)}{2}d$
- 2. La série diverge pour tout $d \in \mathbb{R}\ (sauf\ si\ a = 0\ et\ d = 0)$

Série harmonique alternée

La série de la forme $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k}$ est appelée série harmonique alternée. Elle est une série convergente.

Chapitre 6: Suites et séries (5)

Critères de convergence des séries à termes positifs

Remarque importante:
Critère du terme général ou de divergence à verifier: si La limite $\lim_{k\to\infty} a_k \neq 0$ alors que la série diverge. Si non, on ne peut pas conclure et il faut utiliser un critère parmi ces critères ci-dessous:

Critère de convergence d'une série

Soit $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ une série à **termes positifs** $(a_k > 0)$.
Si $\lim_{k\to\infty} a_k \neq 0$ alors la série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ diverge

Critère de comparaison

Soit $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ et $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ deux séries à **termes positifs** telle que $a_k \leq b_k$.

- ❑ Si la série $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ converge alors la série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge aussi
- ❑ Si la série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ diverge alors la série $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ diverge aussi

Critère d'Alembert

Soit $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ une série à **termes positifs** telle que $\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \mathrm{L}$

- ❑ Si $L < 1$ alors la série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge
- ❑ Si $L > 1$ alors la série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ diverge
- ❑ Si $L = 1$ alors le critère n'est pas concluant.

Critère de l'intégrale

Soit $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ une série à **termes positifs** $(a_k > 0)$.

- ❑ Si $\mathrm{a_k} = f(x)$ pour $k = 1,2,3,4,\ldots$ et si f est une fonction continue, positive et décroissante à long terme, alors la série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ et l'intégrale impropre $\int_1^{\infty} f(x)dx$ convergent ou divergent toutes les deux.

Critère de comparaison à l'aide de la limite

Soit $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ où $\mathbf{a_k > 0}$ et $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ où $\boldsymbol{b_k > 0}$
Soit $L = \lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k}$, si la limite existe, où $0 < L < \infty$

- ❑ Si la série $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ converge alors la série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge aussi
- ❑ Si la série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ diverge alors la série $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ diverge aussi

Critère de Cauchy

Soit $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ une série à **termes positifs** et $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = \mathrm{R}$ si la limite existe ou infinie

- ❑ Si $R < 1$ alors la série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge
- ❑ Si $R > 1$ ou $R \pm \infty$ si alors la série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ diverge
- ❑ Si $\mathrm{R} = 1$ alors le critère n'est pas concluant.

Chapitre 6: Suites et séries (6)

Convergence d'une série alternée

Critère de la série alternée ou critère de Leibniz

Soit $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k a_k$ ou $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1} a_k$ une série alternée

- Si 1- $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$

  2- la suite $\{a_k\}$ est décroissante ($a_k > a_{k+1}$) à partir d'une certaine valeur de l'indice k

ALORS la série alternée converge

Critère d'Alembert généralisé

Soit $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ une série où $a_k \neq 0$ telle que $\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = L$

- Si $L < 1$ alors la série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge
- Si $L > 1$ alors la série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ diverge
- Si $L = 1$ alors le critère n'est pas concluant.

Convergence absolu d'une série alternée

Soit $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ une série à terme de signes quelconques

- Un *série* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *est absolument convergente si* $\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|$ converge.
- Si $\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|$ converge alors $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge

Puisque $-|a_k| \leq a_k \leq |a_k|$ alors $-\sum_{k=1}^{\infty}|a_k| \leq \sum_{k=1}^{\infty} a_k \leq \sum_{k=1}^{\infty}|a_k|$

Si $\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|$ converge vers S alors $-S \leq \sum_{k=1}^{\infty} a_k \leq S$
Donc $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge

Séries de puissances

Série de puissance

Une série de la forme
$\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x-c)^k = a_0+a_1(x-c)^1+a_2(x-c)^2+\cdots$où $a_k \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$ et x une variable réelle, est appelée série de puissances de $(x-c)$,

Série entière

Une série de la forme $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k = a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots$ où $a_k \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$ et x une variable réelle, est appelée série de puissances de x ou encore série entière.

$a_0, a_1, a_2, \ldots$ sont appelés les coefficients de la série

Convergence d'une série de puissance

Soit une série de puissances de la forme$\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x-c)^k$
Le rayon de la convergence ***r*** est défini comme suit:

- ❑ Si la série converge seulement pour $x=c$ alors $r=0$
- ❑ Si la série converge pour tout x tel que $|x-c|<r$ et si la série diverge pour tout $|x-c|>r$, alors le nombre r est le rayon de convergence.
- ❑ Si la série converge pour tout $x \in \mathbb{R}$, alors $r=+\infty$

- ❑ Si une série de puissance converge pour $x \in [n,m]$, $x \in]n,m]$, $x \in [n,m[$ ou bien $x \in]n,m[$alors $r=\frac{m-n}{2}$

Séries de Taylor et MacLaurin

Série de Maclaurin pour f

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)x^2}{2!} + \frac{f'''(0)x^3}{3!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)x^k}{k!}$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \quad \forall\, x \in \,]-1,1[$$

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

Série de Taylor de f autour de c

Soit f une fonction pour laquelle toutes les dérivées successives existent en $x = c$
La série de puissances de $(x = c\,)$représentant la fonction f est

$$f(x) = f(c) + f'(c)\,(x-c) + \frac{f''(c)(x-c)^2}{2!} + \frac{f'''(c)(x-c)^3}{3!} + \cdots$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(c)(x-c)^k}{k!}$$