POLYTECHNIQUE MONTRÉAL
UNIVERSITÉ D'INGÉNIERIE

Le département de mathématiques et de génie industriel (MAGI)

MTH0103: Calcul intégral

Coordination: Houda Trabelsi Courriel: houda.trabelsi@polymtl.ca

Chapitre 1: Intégration (1)

La différentielle

Définition :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $]a,b[$ et soit $x \in]a,b[$. Lorsqu'on fait subir à x un accroissement, c'est-à-dire lorsqu'on passe de x à $x+dx$, cela entraîne un accroissemen Δy ou Δf) le long de la courbe de la fonction qui est donné par :

$$\Delta y = f\left(x+\Delta x\right) - f\left(x\right)$$

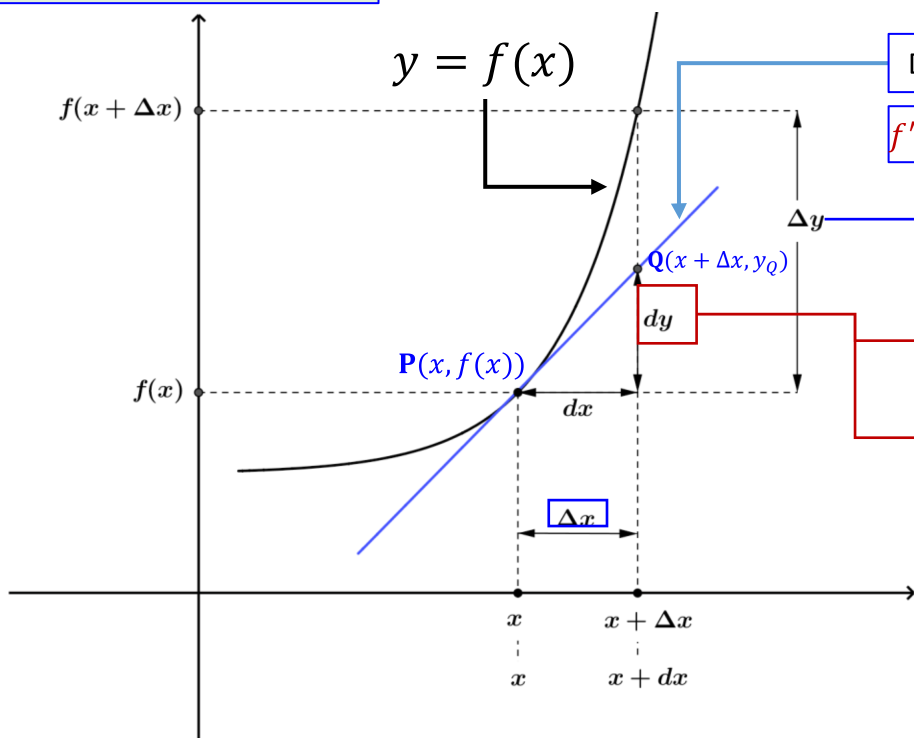
Lorsqu'on fait subir à x un accroissement dx (appelé la différentielle de f), c'est-à-dire lorsqu'on passe de x à $x+dx$, cela entraîne un accroissement dy (ou df) le long de la tangente à la courbe de la fonction f au point $(x,f(x))$. Cet accroissement **tangentiel** dy est appelé la **différentielle** de la fonction f.

Chapitre 1: Intégration (2)

Le département de mathématiques et de génie industriel (MAGI)

La différentielle

- Intérêt pratique
  - Méthode d'approximation
  - Calcul d'erreur
- Intérêt théorique
  - Application de calcul intégral



Droite tangente de pente $f'(x)$

$f'(x) = \frac{dy}{dx}$

$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$

La différentielle

$$dy = f'(x)\Delta x$$

Accroissement **tangentiel**

Notation de Leibnitz $f'(x) = \dfrac{dy}{dx}$ (MTH0101)

$$dy = f'(x)dx$$

Si Δx *et* dx sont petits petit(subjectif) alors $\Delta y \approx dy$

Chapitre 1: Intégration (3)

Le département de mathématiques et de génie industriel (MAGI)

Propriétés de la différentielle

- La différentielle et la dérivée sont deux notions très proches l'une de l'autre.
- La majorité des propositions et formules relatives à la dérivée sont valables pour la différentielle.

Soit $u = u(x)$ et $v = v(x)$

1. $d(u \pm v) = du \pm dv$
2. $d(uv) = vdu + udv$
3. $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$
4. $y = f(u)$ et $u = g(x)$ alors $dy = f'(u)du$

Par la règle de dérivation en chaîne

Propriété d'invariabilité de la différentielle

- La différentielle d'une fonction composée s'exprime de la même manière que si la variable intermédiaire u était une variable indépendante.

⇨ La différentielle d'une fonction f ne dépend pas du fait que x est une variable indépendante ou une fonction d'une autre variable.

1. $d(u^n) = nu^{n-1}du$
2. $d(e^u) = e^u du$
3. $d(\ln(u)) = \frac{1}{u}du$

Largement utilisée dans la méthode de changement de variable

Chapitre 1: Intégration (4)

Le département de mathématiques et de génie industriel (MAGI)

Théorèmes des fonctions continues

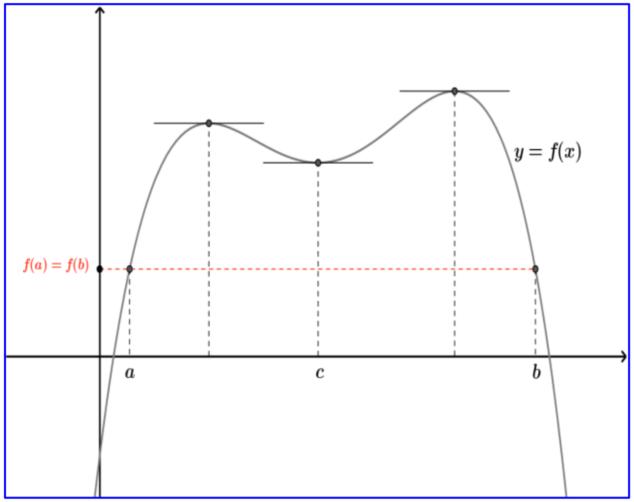
Théorème de Rolle

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.
Si $f(a) = f(b)$, il existe alors au moins un nombre $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$

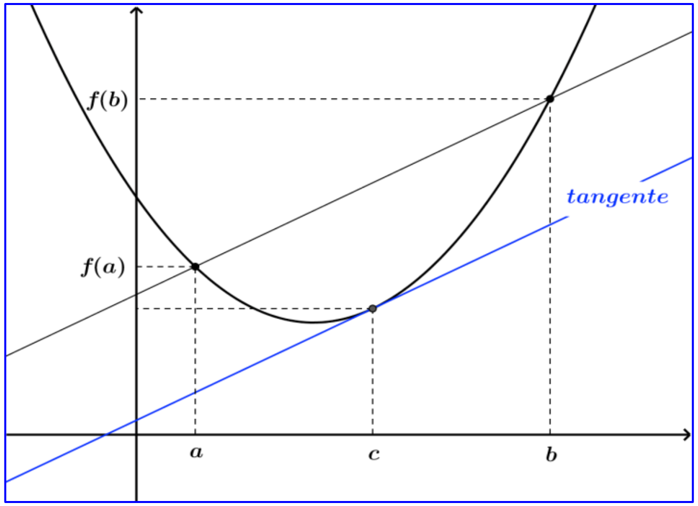
Théorème de Lagrange (ou théorème de la moyenne)

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.
Il existe au moins un nombre $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Graphiquement



Il existe au moins un nombre $c \in]a, b[$ pour lequel la tangente à la courbe au point $(c, f(c))$ est horizontale



Il existe au moins un nombre $c \in]a, b[$ pour lequel la tangente à la courbe au point $(c, f(c))$ est parallèle à la sécante passant par les points $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$

Chapitre 1: Intégration (5)

Théorèmes des fonctions continues

Théorème de la dérivée nulle (Corollaire 1)

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.
Si $f'(x) = 0$ pour tout $x \in]a, b[$ alors la fonction f est constant sur $[a, b]$.

Théorème de de la différence constante (Corollaire 2)

Soit f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.
Si $f'(x) = g'(x)$ pour tout $x \in]a, b[$, il existe alors une constante C telle que $f(x) = g(x) + C, \forall x \in [a, b]$. On dit alors que les deux fonctions f et g ne diffèrent que par une constante sur $[a, b]$"

Règle de l'Hospital

Soit f et g deux fonctions dérivables dans le voisinage d'une valeur a,
$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ est une forme indéterminée $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$ alors $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (si cette limite $\exists$)

le résultat s'applique également aux limites à gauche, aux limites à droite et aux limites à l'infini.