Question 1

Déterminez si les séries suivantes sont convergentes ou divergente. Détaillez pour chaque cas votre démarche en précisant notamment le critère utilisé.

1.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$$

2.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{n+1}$$

3.
$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{8^{k+2}}{(-5)^k}$$

4.
$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln(k))^k}$$

Question 2

1. A partir d'un développement connu, donnez le développement en série de Maclaurin de $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$.
2. Donnez l'intervalle de convergence et le rayon de convergence du développement précédent. Justifiez la réponse à l'aide d'un calcul.
3. A l'aide du résultat obtenu précédemment, donnez un approximation de :

   $$\int_0^1 \frac{\sin(x)}{x} dx.$$

   On utilisera les 3 premiers termes du développement.

Question 3

Calculez, si possible, les intégrales suivantes :

1.
$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \tan(x)dx$$

2.
$$\int_{0}^{+\infty} e^{-4x+10}dx$$

3.
$$\int_{0}^{2} \frac{x^2+x-2}{x^3-2x^2}dx$$

Question 4

1. En utilisant le théorème de Lagrange, montrez que pour tout $x \in]-\infty, 0]$, $\sin(x) \geq x$.

2. Soit $f(x) = \arccos x + \arcsin x$, une fonction continue sur l'intervalle $[-1, 1]$. Démontrez que pour tout $x \in [-1, 1]$, $f(x) = C$, avec $C \in \mathbb{R}$.

3. Donnez la solution générale implicite et, si possible, la solution générale explicite de l'équation différentielle suivante :
$$\frac{dx}{(1 - x^2)e^y} = dy$$