## Question 1

Évaluez les intégrales suivantes.

a) $J_1 = \int \frac{\cos(3x)}{e^x}\, dx\,;$

b) $J_2 = 5\int \frac{\sin^2 x}{\sec^3 x}\, dx\,;$

c) $J_3 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+2x-8}}\, dx\,;$

d) $J_4 = \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1 \frac{3x^4 - x^3 + 2x^2 - x + 2}{x(x^2+1)^2}\, dx\,;$

e) $J_5 = \int_{-2}^{-1} \frac{2x^3+9x^2+15x+2}{(x^2+4x+5)^2}\, dx.$

---

**Réponse :**

a) $J_1 = \frac{(3\sin(3x) - \cos(3x))}{10e^x} + C\,;$

b) $J_2 = 5\frac{\sin^3 x}{3} - \sin^5 x + C\,;$

c) $J_3 = \ln\left|\frac{(x+1)}{3} + \frac{\sqrt{x^2+2x-8}}{3}\right|_4^8 = \ldots.\,;$

d) $J_4 = \left[\ln(x^2\sqrt{(x^2+1)}) - \arctan x + \frac{3}{2(x^2+1)}\right]_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1 = \ln(\frac{3\sqrt{6}}{2}) + \frac{\pi}{12} - \frac{3}{8} = \ldots.\,;$

e) $J_5 = \left[\ln\left|x^2+4x+5\right| - \frac{11}{2}\arctan(x+2) - \frac{5x+11}{2(x^2+4x+5)}\right]_{-2}^{-1}.$

## Question 2

En utilisant la méthode du disque, calculer le volume du solide de révolution engendré par la rotation de la région délimitée par

a) $y = x^2$ et $y = 5x$, autour de la droite $y = 0\,;$

b) $y = \sqrt{x}$ et $y = \frac{x}{4}$ autour de la droite $y = 4\,;$

c) $x^2 - y^2 = 1$ et $x = 4$ autour de la droite $x = -2$.

d) En utilisant la méthode des tubes recalculez le volume des régions données dans les questions a), b) et c).

---

**Réponse :**

a) $\dfrac{1250\pi}{3}\ u^3$ ;

b) $\dfrac{128\pi}{3}\ u^3$ ;

c) $V = \pi \displaystyle\int_{-\sqrt{15}}^{\sqrt{15}} 6^2 - (2 + \sqrt{1 + y^2})^2\, dy = 36\sqrt{15}\pi - 4\pi \ln\left(\sqrt{15} + 4\right)\ u^3$ ;

## Question 3

Selon la méthode des tubes, calculer le volume du solide de révolution engendré par la rotation de la région délimitée par

a) $y = 18x - x^2$ et $y = 0$, autour de l'axe des $y$ ;

b) $y = 6 + 5x - x^2$ et $y + x = 6$ autour de l'axe des $\cancel{y = 8}$; $y$ ;

c) $y = e^x$, $y = \ln x$, $x = 1$ et $x = 6$ autour de l'axe des $y$.

**Réponse :**

a) $V = 17496\pi\ u^3$.

b) Changer l'axe de rotation autour de l'axe des $y$ ;

c) $V = 2\pi \int_1^6 (e^x - \ln x)(x)\cancel{-4)}\, dx = \cancel{2\pi(4e^6 + e - 12\ln 6 + \frac{15}{4})\ u^3}$.

$= 2\pi \left[ e^x(x-1) + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x^2 \ln x \right]_1^6$

## Question 4

Calculer la valeur moyenne de la fonction $\sin(ax)$ entre $[-b\pi; b\pi]$, pour tout $a$ et $b$ réels non nuls. Interpréter le résultat.
(Indication : si $f$ est une fonction continue sur $[a, b]$, alors la valeur moyenne d'une fonction est égale au réel $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\, dx$.)

---

**Réponse :** 0, car f est une fonction impaire donc $\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 0$

## Question 5

La hauteur d'un fil téléphonique reliant un poteau à une maison est donnée par l'équation

$$f(x) = \frac{a\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)}{2}.$$

a) Déterminez la valeur de $a$ sachant que la fonction passe par le point $(0, 4)$ et calculer la longueur $L$ du fil entre $[-\ln(16); \ln(16)]$.

b) Calculer l'aire sous la courbe et $y = 0$ où $x \in [-\ln(16); \ln(16)]$.

---

**Réponse :**

a) $a = 4$ et $L = 6\ u$.

b) $A = 24\ u^2$.

## Question 6

Une maladie contagieuse se propage dans une ville à un rythme qui est à la fois proportionnel au poursontage $P$ des personnes atteintes de la maladie et au pourcentage $(1 - P)$ des personnes non atteintes de la maladie. Supposons que 10% de la population est atteinte au début de l'épidémie et qu'après 10 jours, ce pourcentage passe à 20%. **Réponse :**

1. $\dfrac{dP}{dt} = kP(1 - P)$
2. $\ln\left|\frac{P}{1-P}\right| = kt + C$
3. $P(t) = \dfrac{\left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{t}{10}}}{9 + \left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{t}{10}}}$