Exercices de révision

1. Calculer l'aire des régions fermées délimitées par les courbes suivantes :
   a. $y = xe^{x^2}$, $y = 0$, $x = -1$ et $x = 2$
   b. $y = \cos^2 x \sin x$, $y = 0$, $x = -\dfrac{\pi}{2}$ et $x = \dfrac{\pi}{2}$
   c. $y = \dfrac{x^2}{4}$ et $y = \dfrac{x}{2} + 2$

Pour les questions d'aire et de volume, tracez le graphique (à la main ou à l'aide d'un logiciel).

2. Trouver la solution particulière des équations différentielles suivantes :
   a. $\dfrac{dy}{dx} = \sqrt{3+2x}$; $(3, 4)$
   b. $\cos x \; dm = \tan^3 x \; dx$; $(0, 1)$
   c. $\dfrac{dy}{dx} = 3e^{2x}$; $(1, e^2)$
   d. $\dfrac{ds}{dt} = \dfrac{e^t}{1+e^t}$; $(0, 0)$

3. Évaluer les intégrales suivantes :
   a. $\displaystyle\int \frac{(\ln x)^{2/3}}{x} dx$
   b. $\displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi} \sin^3 \theta \cos \theta d\theta$
   c. $\displaystyle\int \left(2^x - 5x^3 - 2\sin x + 3e^x + \frac{1}{x^{2/3}} \right) dx$
   d. $\displaystyle\int_0^2 \frac{e^{1/x}}{x^2} dx$
   e. $\displaystyle\int \frac{3x^2 + 3x + 1}{x^3(1+x)} dx$
   f. $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{16+x^2}} dx$
   g. $\displaystyle\int e^{2x} \sin x \; dx$
   h. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} dx$
   i. $\displaystyle\int x\sqrt{1+x} \; dx$

Exercices de révision

S

4. Trouver l'aire entre…
   a. $y = x^2 e^{-x}$ et l'axe des x sur $[\ 0\ ,\ \infty\ [$
   b. $y = \dfrac{\sqrt{x^2 - 1}}{x^2}$ et l'axe des x sur $[\ 1\ ,\ \infty\ [$

5. Dans une culture de bactéries, le nombre de bactéries s'accroît à un taux proportionnel au nombre de bactéries présentes au moment de l'observation. Si au début de l'observation il y a 3000 bactéries et que 2 jours après, il y a 7000 bactéries, déterminer la quantité de bactéries présentes après 5 jours.

6. Il y a 5 ans, on a relâché dans un parc national 100 chevreuils. Aujourd'hui, leur nombre atteint 432. La population maximale que peut accueillir le parc des de 2000 chevreuils. Sachant que le taux de croissance de la population de chevreuils est proportionnel au produit de la population par la différence entre la population maximale et la population, quel sera le nombre de chevreuils présents dans le parc dans 5 ans?

7. Utiliser les 5 premiers termes du développement en séries de Maclaurin pour approximer la valeur des intégrales définies suivantes :

   a. $\displaystyle\int_0^{0,1} \cos\sqrt{x}\ dx$
   b. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \sin\left(x^2\right) dx$
   c. $\displaystyle\int_0^{1} e^{-x^2} dx$

8.
   a. Écrire les 5 premiers termes du développement en série de Maclaurin de $f\left(x\right) = \dfrac{\sin x}{x}$, puis l'écrire à l'aide du symbole de sommation.

   S

   b. Évaluer approximativement l'aire entre cette courbe et l'axe des x sur l'intervalle $[\ 0\ ,\ 2\pi\ [$.

9. Montrer que le développement en série de Taylor de la fonction $f\left(x\right) = e^{4x-1}$ autour de $x = \dfrac{1}{4}$ est $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(4x-1\right)^n}{n!}$ et trouver son intervalle de convergence.

S Ce symbole signifie que la question est une question synthèse.

Exercices de révision

10. Calculer la somme des séries suivantes :

a. $2+\frac{2}{3}+\frac{2}{9}+\frac{2}{27}+...$

b. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{2}$

11. Étudier la convergence des séries suivantes :

a. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{3^n n!}$

b. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-3)^n}{4^{n+2}}$

c. $\sum_{n=5}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n-4}}$

d. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{2n+3}$

12. Trouver l'intervalle de convergence et le rayon de convergence des séries suivantes :

a. $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(x+1)^k}{3^k}$

b. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2x-5)^k}{k^2}$

(ne pas étudier la convergence aux bornes de cette série)

13. Calculer le volume du solide engendré par la rotation de la région bornée par :

a. $f(x)=\frac{1}{x}, \quad x=1, \quad x=\frac{1}{5}, y=0$ autour de l'axe des x

b. $f(x)=1-x^2$ et $y=0$ autour de l'axe $y=1$

S 14. Trouver l'aire de la surface bornée par $y=2, \quad x=0, \quad y=2-e^{-x}$, puis trouver le volume engendré par la rotation de cette surface autour de l'axe des x.

S 15. Un réservoir d'eau, dont la hauteur au centre est de 4 m, a la forme d'un paraboloïde, c'est-à-dire qu'il est formé par la rotation de la branche positive de la parabole $y=\frac{x^2}{4}$ autour de l'axe des y. Quel est le volume d'eau que peut contenir un tel réservoir?

S 16. Soit la région entre $f(x)=\sin x$ et l'axe des x sur $[0 \, , \, \pi]$.

a. Évaluer le volume obtenu par la rotation de cette région autour de l'axe des x.

b. Évaluer le volume obtenu par la rotation de cette région autour de l'axe des y.

S Ce symbole signifie que la question est une question synthèse.

Réponses

1. Calculer l'aire des régions fermées délimitées par les courbes suivantes.

a) $\frac{e^4}{2}+\frac{e}{2}-1 \quad u^2$

b) $\frac{2}{3}\ u^2$

c) $9\ u^2$

2. Trouver la solution particulière des équations différentielles suivantes.

a) $y=\frac{\sqrt{(3+2x)^3}}{3}-5$

b) $m=\frac{\sec^3 x}{3}-\sec x+\frac{5}{3}$

c) $y=\frac{3e^{2x}}{2}-\frac{e^2}{2}$

d) $s=\ln\left(e^t+1\right)-\ln 2$

3. Évaluer les intégrales suivantes.

a) $\frac{3(\ln x)^{5/3}}{5}+C$

b) $-\frac{1}{4}$

c) $\frac{2^x}{\ln 2}-\frac{5x^4}{4}+2\cos x+3e^x+3x^{1/3}+C$

d) ∞

e) $\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|-\frac{2}{x}-\frac{1}{2x^2}+C$

f) $\frac{\sqrt{\left(16+x^2\right)^3}}{3}-16\sqrt{16+x^2}+C$

g) $\frac{2}{5}e^{2x}\sin x-\frac{1}{5}e^{2x}\cos x+C$

h) $\frac{-\sqrt{1-x^2}}{x}-\arcsin x+C$

i) $\frac{2}{5}(1+x)^{5/2}-\frac{2}{3}(1+x)^{3/2}+C$ ou $\frac{2}{15}(1+x)^{3/2}(3x-2)+C$

4. Trouver l'aire.
   a. $2\ u^2$
   b. L'aire est infinie.

5. Environ 24950 bactéries.

6. Environ 1181 chevreuils.

Réponses

7. …approximer la valeur des intégrales définies suivantes.
   a. $\approx 0,097514$
   b. $\approx 0,157155$
   c. $\approx 0,747487$

8.
   a. $\dfrac{\sin x}{x} = 1 - \dfrac{x^2}{3!} + \dfrac{x^4}{5!} - \dfrac{x^6}{7!} + \dfrac{x^8}{9!} - \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n+1)!}$
   b. $A \approx 2,2913 \;\; u^2$

9. $e^{4x-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{4^n \left(x - \frac{1}{4}\right)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(4x-1)^n}{n!}$

   $\text{Intervalle}: \; \mathbb{R}$

10. Calculer la somme des séries suivantes.
    a. 3
    b. ∞ (Série divergente)

11. Étudier la convergence des séries suivantes.
    a. C (par d'Alembert)
    b. C (par d'Alembert ou par les séries géométriques)
    c. D (séries de Riemann)
    d. D (critère du terme général)

12. Trouver l'intervalle de convergence et le rayon de convergence des séries suivantes.
    a. Intervalle :] –4, 2 [Rayon : 3
    b. Intervalle :] 2, 3] Rayon : ½

13. Calculer le volume du solide engendré par la rotation de la région bornée.
    a. $4\pi \;\; u^3$
    b. $\dfrac{8\pi}{5} \;\; u^3$

14. $A = 1 \, u^2$ $\qquad V = \dfrac{7\pi}{2} \;\; u^3$

15. $V = 32\pi \;\; m^3$

16. $a) \;\; V = \dfrac{\pi^2}{2} \;\; u^3$ $\qquad b) \;\; V = 2\pi^2 \;\; u^3$