Polytechnique de Montréal **Quiz 1**
MTH0103 : Calcul intégral

Nom, Prénom, Matricule :

Quiz 1

- La durée du devoir est 30 min.
- Les réponses non justifiées ne sont pas considérées.
- Sauf indication contraire, x et y sont des nombres réels

Question 1 (1 point)

Utiliser la notion de différentielle pour trouver une valeur approchée de

$\sqrt[4]{1.025}$. $f(x) = \sqrt[4]{x} = x^{1/4}$ 0,25 $x = 1$ $\Delta x = 0.025$

petit

$\Delta x \approx dx$

1. $dy = f'(x)\,dx$

$= \dfrac{dx}{4x^{3/4}} = \dfrac{0.025}{4} = 0.00625$ 0,25

2. $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$

$= (1.025)^{1/4} - 1^{1/4} = 1$ 0,25

3. $\Delta y \approx dy$ car

$(1.025)^{1/4} - 1 \approx 0.00625$ 0,25

$(1,025)^{1/4} \approx 1.00625$

Question 2 (3 points)

1 1. Démontrer le corollaire suivant : Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Si $f'(x) = 0$ pour tout $x \in]a, b[$ alors la fonction f est constante sur $[a, b]$. 1pt

0.5 2. Montrer pour tout $x \geq 0$, $\sin(x) \leq x$. 0,5

0.75 3. Calculer $\int \frac{\sin^2(\sqrt{x})\cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx$. 0,75

0.75 4. Calculer $\int \frac{1}{e^x + e^{-x}}dx$ 0,75

1, p.8 chap. 1

Soit $x_1, x_2 \in [a, b]$. Selon Lagrange sur $[x_1, x_2]$, $\exists$ un nb $c \in]x_1, x_2[$ t.q. $f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ 0,25

par hyp., $f'(x) = 0$ $\forall x \in]a, b[$, alors

$f'(c) = 0$ car $c \in]a, b[$

Ainsi, $0 = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ 0,25

$\Rightarrow 0 = f(x_2) - f(x_1)$ 0,25

$\Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$ 0,25

Puisque x_1, x_2 sont quelconques $\Rightarrow f(x) = k$, une cste $\forall x \in [a, b]$ ⊠

2. M.Q $\forall x \geq 0$, $\sin(x) \leq x$

$f(x) = \sin(x)$ ↳ cont. et dérivable sur $\mathbb{R}$

$f'(x) = \cos(x)$

D'après Lagrange sur $[0, x]$, $\exists$ $c \geq 0$ t.q.

$f'(c) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\sin(x)}{x}$ $\Rightarrow \cos(c) = \frac{\sin(x)}{x}$ $\frac{0,5}{0,5}$

on sait que $\cos(c) \leq 1$ $\forall c \in [0, x]$

$\Rightarrow \cos(c) = \frac{\sin(x)}{x} \leq 1$ $\Rightarrow \sin(x) \leq x$ $\forall x \geq 0$

3. $I = \int \frac{\sin^2(\sqrt{x}) \cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx$

$u = \sin(\sqrt{x}) \Rightarrow du = \frac{\cos(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} dx$ 0,25

$I = \int 2u^2 du = 2\int u^2 du = 2\left(\frac{u^3}{3}\right) + C$ 0,25

$= \frac{2}{3} \sin^3 \sqrt{x} + C$ 0,25

4. $I = \int \frac{1}{e^x + e^{-x}} \cdot \frac{e^x}{e^x} dx = \int \frac{e^x}{1 + e^{2x}} dx$

$u = e^x$ $du = e^x dx$
$\Rightarrow e^{2x} = u^2$ 0,25

$I = \int \frac{1}{1+u^2} du = \arctan(u) + C = \arctan(e^x) + C$

0,25 0,125

Question 3 (1 point)

En utilisant la différentielle, déterminez la variation du volume d'une sphère dont le rayon passe de 15 cm à 15.1 cm.

Indice : Le volume d'une sphère est donné par $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, où r est le rayon.

$V = \frac{4}{3}\pi r^3$ $\quad r = 15 \quad \Delta r = 0.1$

$\frac{dV}{dr} = 4\pi r^2$

$\Rightarrow \Delta V \approx \frac{dV}{dr} \Delta r$ $\quad 0.1$ $\quad \Delta V \simeq dV$

$\approx 4\pi r^2 \cdot \Delta r$

$\simeq 4\pi (15)^2 \cdot 0.1$

$\simeq 4\pi \frac{45}{2}$

$\approx 90\pi$