

Nom, Prénom, Matricule :

---

Quiz 1

- La durée du devoir est 30 min.
  - Les réponses non justifiées ne sont pas considérées.
  - Sauf indication contraire,  $x$  et  $y$  sont des nombres réels
- 

Question 1 (1 point)

Utiliser la notion de différentielle pour trouver une valeur approchée de

$\sqrt[4]{1.025}$ .  $f(x) = \sqrt[4]{x} = x^{1/4}$  0,25  $x = 1$   $\Delta x = 0,025$   
↳ petit  $\Delta x \approx dx$

1.  $dy = f'(x) dx$   
 $= \frac{dx}{4x^{3/4}} = \frac{0,025}{4} = 0,00625$  0,4

2.  $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$   
 $= (1,025)^{1/4} - 1^{1/4} = 1$  0,25

3.  $\Delta y \approx dy$  car  
 $(1,025)^{1/4} - 1 \approx 0,00625$   
 $(1,025)^{1/4} \approx 1,00625$  0,25

## Question 2 (3 points)

1. Démontrer le corollaire suivant : Soit  $f$  une fonction continue sur  $[a, b]$  et dérivable sur  $]a, b[$ .  
Si  $f'(x) = 0$  pour tout  $x \in ]a, b[$  alors la fonction  $f$  est constante sur  $[a, b]$ . 1pt
- 0.5 2. Montrer pour tout  $x \geq 0$ ,  $\sin(x) \leq x$ . 0,5
- 0.75 3. Calculer  $\int \frac{\sin^2(\sqrt{x}) \cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx$ . 0,75
- 0.75 4. Calculer  $\int \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx$ . 0,75

1, p. 8 chap. 1

Soit  $x_1, x_2 \in [a, b]$ . Selon Lagrange sur  $[x_1, x_2]$ ,  $\exists$  un nb  $c \in ]x_1, x_2[$  t.g.  $f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$

par hyp.,  $f'(x) = 0 \quad \forall x \in ]a, b[$ , alors  
 $f'(c) = 0$  car  $c \in ]a, b[$

Ainsi,

$$0 = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$\Rightarrow 0 = f(x_2) - f(x_1)$$

$$\Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$$

Puisque  $x_1, x_2$  sont quelconques  $\Rightarrow f(x) = k$ , une cste  
 $\forall x \in [a, b]$

2. M.Q.  $\forall x \geq 0$ ,  $\sin(x) \leq x$

$$f(x) = \sin(x)$$

$$f'(x) = \cos(x)$$

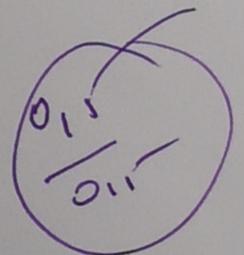
$\hookrightarrow$  cont. et dérivable sur  $\mathbb{R}$

d'après Lagrange sur  $[0, x]$ ,  $\exists c \geq 0$  t.g.

$$f'(c) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\sin(x)}{x} \Rightarrow \cos(c) = \frac{\sin(x)}{x}$$

on sait que  $\cos(c) \leq 1 \quad \forall c \in [0, x]$

$$\Rightarrow \cos(c) = \frac{\sin(x)}{x} \leq 1 \Rightarrow \sin(x) \leq x \quad \forall x \geq 0$$



$$\underline{3.} \quad I = \int \frac{\sin^2(\sqrt{x}) \cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx$$

$$u = \sin(\sqrt{x}) \Rightarrow du = \frac{\cos(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} dx$$

0,25

$$I = \int 2u^2 du = 2 \int u^2 du = 2 \left( \frac{u^3}{3} \right) + C$$

$$= \frac{2}{3} \sin^3 \sqrt{x} + C$$

0,25

$$\underline{4.} \quad I = \int \frac{1}{e^x + e^{-x}} \cdot \frac{e^x}{e^x} dx = \int \frac{e^x}{1 + e^{2x}} dx$$

$$u = e^x \Rightarrow e^{2x} = u^2 \quad du = e^x dx$$

$$I = \int \frac{1}{1 + u^2} du = \arctan(u) + C = \arctan(e^x) + C$$

0,25

0,25

### Question 3 (1 point)

En utilisant la différentielle, déterminez la variation du volume d'une sphère dont le rayon passe de 15 cm à 15.1 cm.

Indice : Le volume d'une sphère est donné par  $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ , où  $r$  est le rayon.

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$r = 15$$

$$\Delta r = 0.1$$

$$\frac{dV}{dr} = 4\pi r^2$$

$$\Rightarrow \Delta V \approx \frac{dV}{dr} \Delta r$$

0.1

$$\Delta V \approx dV$$

$$\approx 4\pi r^2 \cdot \Delta r$$

$$\approx 4\pi (15)^2 \cdot 0.1$$

$$\approx 4\pi \frac{45}{2}$$

$$\approx 90\pi$$