Nom et prénom : Matricule :

Quiz 1

- La durée du quiz est 30 min.
- Les réponses non justifiées ne sont pas considérées.

Question 1 (3,5 points)

a) En utilisant la notion de la différentielle, trouvez une approximation de $\ln(1,5)$.

b) En utilisant la tangente à la courbe représentez cette approximation sur le graphe. Indiquez Δx, Δy, dx et dy.

$f(x) = \ln(x)$; $\left.\begin{array}{l} x_0 + \Delta x = 1.5 \\ x_0 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta x = 0.5 = dx$

$f'(x) = \frac{1}{x}$

$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \Rightarrow \Delta y = f(1.5) - f(1)$

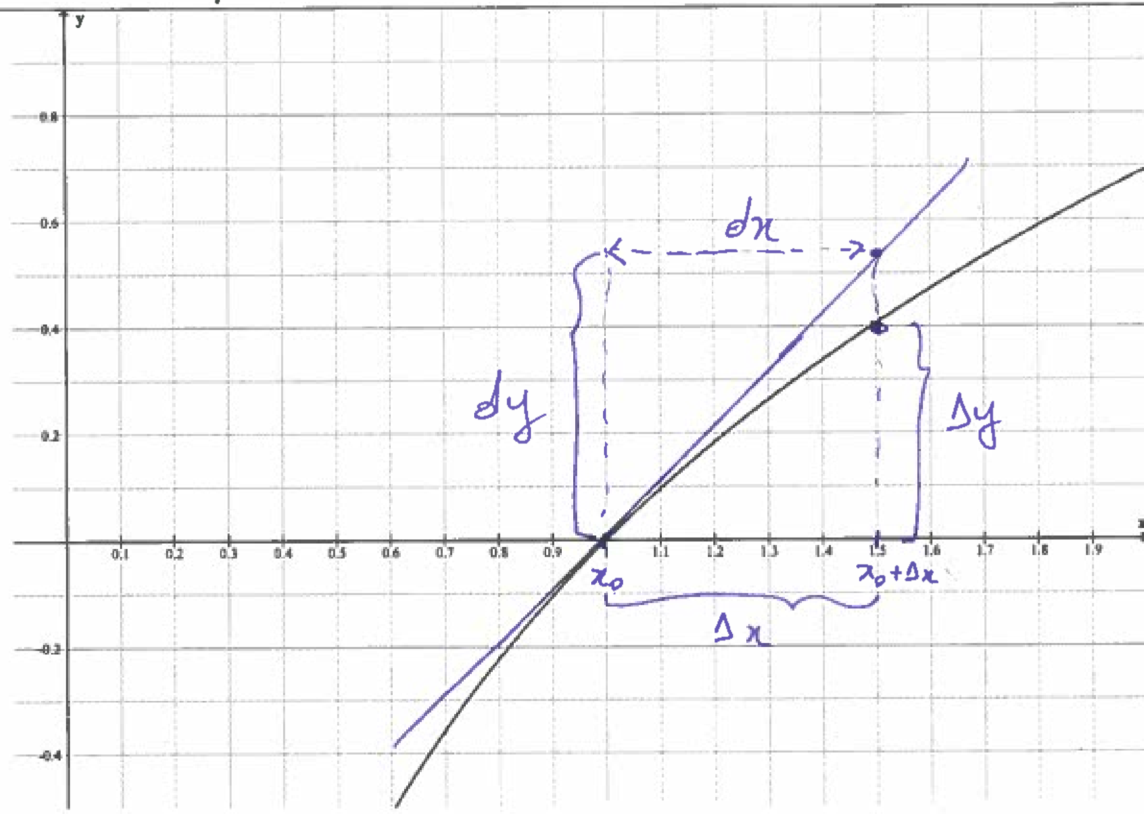
$\Rightarrow \Delta y = \ln(1.5) - \ln 1$

$\Rightarrow \boxed{\ln(1.5) = \Delta y}$

$\boxed{\Delta y \approx dy\big|_{x=1}}$

$dy = f'(x)\,dx = \frac{1}{x}\,dx \Rightarrow \boxed{dy\big|_{x=1} = f'(1)\cdot\Delta x = 0.5}$

$\Rightarrow \boxed{\ln(1.5) \approx 0.5}$


y
0.8
0.6
0.4
0.2
-0.2
-0.4
x
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1.1
1.2
1.3
1.4
1.5
1.6
1.7
1.8
1.9
dx
dy
Δy
x0
x0+Δx
Δx

Question 2 (4 points) En utilisant le théorème de Lagrange, montrez que $1 - e^{-x} \leq x$, pour tout $x \in]-\infty, 0]$.

$f(x) = 1 - e^{-x}$; $[a, b] = [x, 0]$, $\forall x \leq 0$.

$\boxed{f'(x) = e^{-x}}$

f est continue sur $[x, 0]$, $\forall x < 0$.

f est dérivable sur $]x, 0[$, $\forall x < 0$.

Donc,

$\exists\, c \in]x, 0[, \forall x < 0 \mid f'(c) = \dfrac{f(0) - f(x)}{0 - x}$

$\Rightarrow c \in]-\infty, 0[\mid e^{-c} = \dfrac{0 - (1 - e^{-x})}{-x}$

$\Rightarrow c < 0$, $\boxed{e^{-c} = \dfrac{1 - e^{-x}}{x}}$.

$c < 0 \Rightarrow -c > 0 \Rightarrow \boxed{e^{-c} > e^{0} = 1}$

$\Rightarrow \dfrac{1 - e^{-x}}{x} = e^{-c} > 1$, $\forall x < 0$

$\Rightarrow \dfrac{1 - e^{-x}}{x} > 1$, $\forall x < 0 \Rightarrow \boxed{1 - e^{-x} < x, \forall x < 0}$

$x = 0 \Rightarrow 1 - e^{0} = 0$

Conclusion : $\forall x \in]-\infty, 0]$, $1 - e^{-x} \leq x$.

Question 3 (2,5 points) Les conditions du théorème de Rolle sont-elles vérifiées ? Si oui, déterminer la valeur de c, sinon donner une des hypothèses qui n'est pas vérifiée.

a) $f(x) = x^2 + 3x - 4$ sur $[-5, 2]$.

b) $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x}{x^2 + 5x - 6}$ sur $[0, 3]$.

a/ $f(x) = x^2 + 3x - 4$; $f'(x) = 2x + 3$.

$f(-5) = 6 = f(2) = 6$

f est continue sur $[-5, 2]$; f est dérivable sur $]-5, 2[$

et $f(-5) = f(2)$

Donc, $\exists\, c \in\,]-5, 2[\;|\; f'(c) = 0 \Rightarrow 2c + 3 = 0 \Rightarrow c = -3/2$

$\boxed{c = -3/2} \in\,]-5, 2[$.

b/ $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x}{x^2 + 5x - 6}$; $x \in [0, 3]$.

$f(1) \nexists$ car $x^2 + 5x - 6$ s'annulle pour $x = 1$.

Donc, f n'est pas continue sur $[0, 3]$.