Examen de modélisation

Correction

Question 1

On a un preoblème de flux à "profit maximum", qui est juste une variante du problème de flux à coût minimum. On modélise ce problème par le graphe ci-dessous. On écrit en rouge le flux entrant et sortant des nœuds sources et puit.

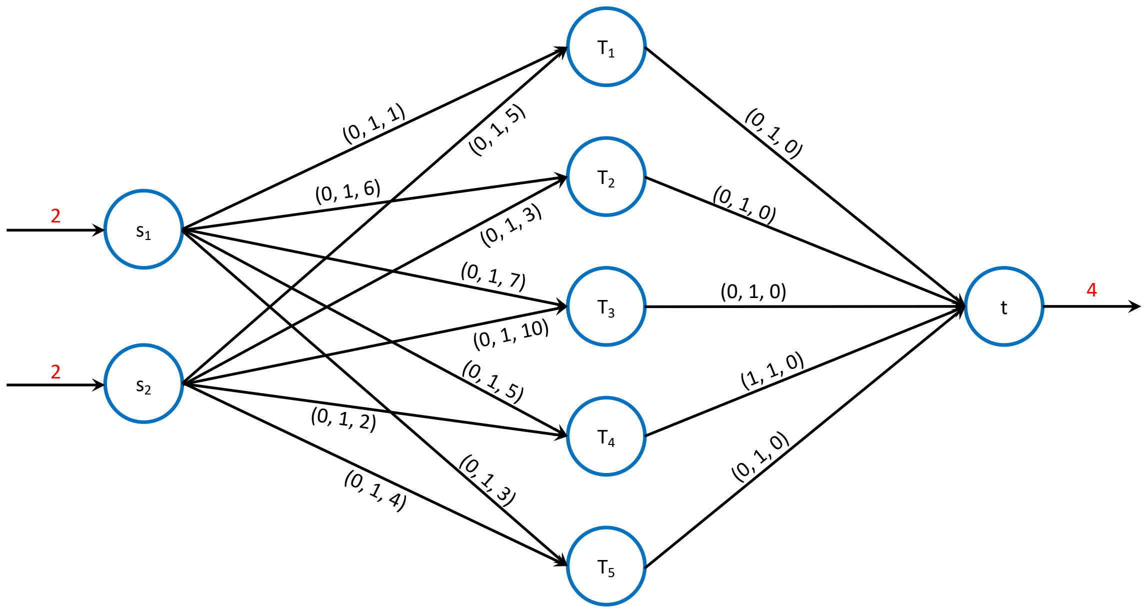

FIGURE 1 – Problème de flux à "profit maximum"

Paramètres :
Nœuds sources (correspondant aux travailleurs) : s_1, s_2
Nœud puit : t
Nœuds travaux : T_1, T_2, T_3, T_4, T_5
Ensemble des arcs : $\mathcal{A}$
Bornes inférieures et supérieures et profits des flux : (l_{ij}, uij, c_{ij}) pour tout $(i, j) \in \mathcal{A}$

Variables :
Flux sur les arcs : x_{ij} pour tout $(i, j) \in \mathcal{A}$

Fonction objectif :

$$\max \sum_{(i,j)\in\mathcal{A}} c_{ij}x_{ij}$$

Contraintes :

- Flux entier
  $\forall\ (i,\ j) \in \mathcal{A},\ x_{ij} \in \mathbb{Z}$
- Respect des bornes
  $\forall\ (i,\ j) \in \mathcal{A},\ l_{ij} \leq x_{ij} \leq u_{ij}$
- Conservation du flux
  en s_1 : $\sum_{j,\ (s_1,j)\in\mathcal{A}} x_{s_1 j} = 2$
  en s_2 : $\sum_{j,\ (s_2,j)\in\mathcal{A}} x_{s_1 j} = 2$
  en t : $\sum_{i,\ (i,t)\in\mathcal{A}} x_{it} = 4$
  autres nœuds : $\forall i \in \{T_1,\ T_2,\ T_3,\ T_4,\ T_5\},\ \sum_{j,\ (i,j)\in\mathcal{A}} x_{ij} = \sum_{j,\ (j,i)\in\mathcal{A}} x_{ji}$

Question 2

Données :
Prix de vente de Prod$j$: p_j, $j \in$ {A, B, C}
Coût d'achat de MPi : c_i, $i \in \{1,\ 2,\ 3\}$
Limite de demande pour Prod$j$: d_j, $j \in$ {A, B, C}
Quantité disponible de MPi : q_i, $i \in \{1,\ 2,\ 3\}$

Variables :
Quantité de MPi achetée pour Prod$j$: x_{ij}, $i \in \{1,\ 2,\ 3\}$, $j \in$ {A, B, C}
Quantité de ProdA utilisée pour ProdB : y_A
Quantité de ProdB utilisée pour ProdC : y_B
Quantie de Prod$j$ vendue : z_j, $j \in$ {A, B, C}

Remarque : il est possible de faire un modèle avec un peu moins de variables mais il serait moins lisible.

Fonction objectif

$$\max \sum_{j\in\{A,B,C\}} p_j z_j - \sum_{i\in\{1,2,3\}} c_i \sum_{j\in\{A,B,C\}} x_{ij}$$

Contraintes :

- Ne pas dépasser les demandes
  $\forall j \in$ {A, B, C}, $z_j \leq d_j$
- Respect des quantités disponibles
  $\forall i \in \{1,\ 2,\ 3\},\ \sum_{j\in\{A,B,C\}} x_{ij} \leq q_i$
- Fabrication de ProdA
  $z_A + y_A \leq x_{1A}$
- Fabrication de ProdB
  $z_B + y_B \leq x_{1B}$

$2(z_B + y_B) \leq x_{2B}$
$2(z_B + y_B) \leq y_A$

— Fabrication de ProdC
$z_C \leq x_{2C}$
$z_C \leq x_{3C}$
$z_C \leq y_B$

— Variables entières et positives
$\forall\ i \in \{1, 2, 3\}$, $j \in \{\text{A, B, C}\}$, $x_{ij} \in \mathbb{N}$
y_A, $y_B \in \mathbb{N}$
$\forall j \in \{\text{A, B, C}\}$, $z_j \in \mathbb{N}$

Question 3

(a)

Données : Nombre de clients : n
Temps de service du client i : s_i, $i \in \{1,\dots n\}$ ($s_0 = 0$)
Fenêtre de temps du client i : $[e_i, l_i]$, $i \in \{1,\dots n\}$
Temps de transport entre deux clients i et j : c_{ij}, $i \in \{1,\dots n\}$, $j \in \{1,\dots n\}$
Temps de transport entre le dépôt et un client i : c_{0i}, $i \in \{1,\dots n\}$
Constante suffisamment grande : M

Variables :
x_{ij}, $i \in \{0,\dots n\}$, $j \in \{0,\dots n\}$: 1 si le véhicule va directement du client i au client j (ou dépôt 0)
t_i, $i \in \{0,\dots n\}$: temps d'arrivée chez le client i (ou dépôt 0)

Fonction objectif :

$$\min \sum_{i=0}^{n} \sum_{i=0}^{n} x_{ij}(c_{ij} + s_i)$$

Contraintes :

— Le véhicule fait une tournée qui sert chaque client et le dépôt exactement une fois
$\forall i \in \{0,\dots n\}$, $\sum_{j=0}^{n} x_{ij} = 1$
— Respect des fenêtres de temps
$\forall i \in \{1,\dots n\}$, $e_i \leq t_i$
$\forall i \in \{1,\dots n\}$, $t_i + s_i \leq l_i$
— Lien entre les x_{ij} et t_i
$\forall i \in \{0,\dots n\}$, $j \in \{1,\dots n\}$, $t_i + s_i + c_{ij} \leq t_j + M(1 - x_{ij})$
— Variables positives ou binaires
$\forall i \in \{0,\dots n\}$, $j \in \{1,\dots n\}$, $x_{ij} \in \{0, 1\}$
$\forall i \in \{0,\dots n\}$, $t_i \geq 0$

(b)

Données :
Ensemble des clients à visiter : E ={1,... n}
Temps de service du client i : s_i, $i \in \{1,\dots n\}$ $(s_0 = 0)$
Fenêtre de temps du client i : $[e_i, l_i]$, $i \in \{1,\dots n\}$
Temps de transport entre deux clients i et j : c_{ij}, $i \in \{1,\dots n\}$, $j \in \{1,\dots n\}$
Temps de transport entre le dépôt et un client i : c_{0i}, $i \in \{1,\dots n\}$

Variables
x_i, $i \in \{1,\dots n\}$: client en $i^{\text{ème}}$ position dans la tournée ($x_0 = 0$ et $x_{n+1} = 0$)

Fonction objectif :

$$\min \sum_{i=0}^{n} c_{x_i x_{i+1}} + s_{x_i}$$

Contraintes :

— $\forall i \in \{1,\dots n\}$, $x_i \in E$
— $alldifferent(x_i, i \in \{1,\dots n\})$
— $\forall i \in \{1,\dots n\}$, $e_{x_i} \leq \sum_{j=0}^{i-1} c_{x_j x_{j+1}} + s_{x_j}$
   $\forall i \in \{1,\dots n\}$, $s_{x_i} + \sum_{j=0}^{i-1} c_{x_j x_{j+1}} + s_{x_j} \leq l_{x_i}$