Outils de Recherche Opérationnelle en Génie MTH 8414

Flux dans les réseaux

- Flux à coût minimum
- Plus court chemin
- Flux maximal
- Problèmes de transport
- Problèmes d'affectation
- Autres formulations
- Créations d'horaires

Louis-Martin Rousseau

Office: A520.21 Tel.: #4569
Louis-Martin.Rousseau@polymtl.ca

Concepts de base

Réseau: *G(N,A)*

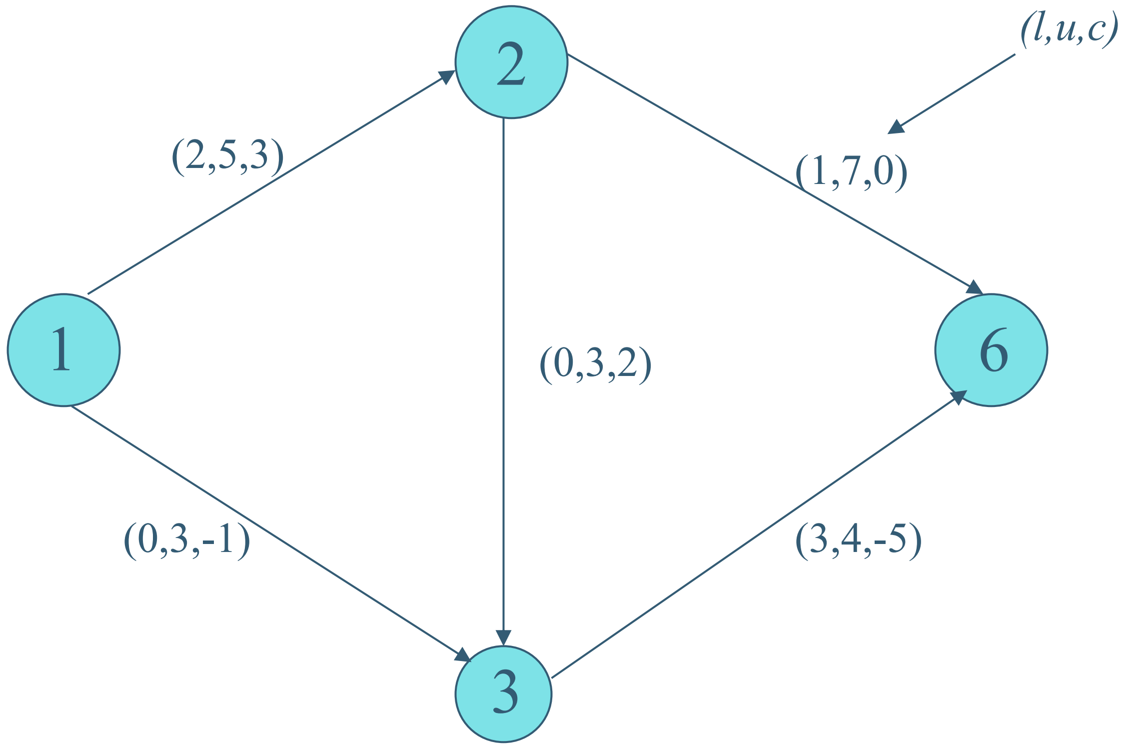
Graphe orienté où *N* désigne l'ensemble des nœuds et *A* l'ensemble des arcs du réseau sur lequel il y a possibilité de faire circuler du flux.

Notation:

- x_{ij} : le flux circulant sur l'arc (i, j).
- c_{ij} : le coût unitaire du flux sur l'arc (i, j).
- u_{ij} : la capacité de l'arc (i, j) correspondant à une borne supérieure sur x_{ij}.
- l_{ij} : une borne inférieure sur x_{ij} (avec $0 \leq l_{ij} \leq u_{ij}$).

Exemple

- À l'arc (i,j) est associé le triplet (l_{ij},u_{ij},c_{ij}).
- À un nœud i est associée une demande d_i
- Par exemple pour l'arc (1,2), le triplet associé (2,5,3) indique $l_{12} = 2$, $u_{12} = 5$ et $c_{12} = 3$.



Caractéristiques des problèmes de flux

- À chaque nœud $i \in N$

$$B_i = \{j \in N: \quad (j,\ i) \in A\} \longleftarrow \text{Prédécesseurs de } i$$

$$P_i = \{j \in N: \quad (i,\ j) \in A\} \longleftarrow \text{Successeurs de } i$$

- les contraintes de conservation de flux associées aux nœuds du réseau:
  - nœud source s
  - nœud intermédiaire i
  - nœud destination t

Outils de Recherche Opérationnelle en Génie MTH 8414

Flux dans les réseaux

- Flux à coût minimum
- Plus court chemin
- Flux maximal
- Problèmes de transport
- Problèmes d’affectation
- Autres formulations
- Créations d’horaires

Louis-Martin Rousseau

Office: A520.21 Tel.: #4569
Louis-Martin.Rousseau@polymtl.ca

Flux à côut minimum

Problème de flux à coût minimum d'une source s' à une destination t (Minimum Cost Flow)

Considérant un réseau où un coût unitaire est spécifié pour chaque arc et où une quantité d de flux doit être déplacée d'un nœud source s' à un nœud destination t, nous voulons déterminer la quantité de flux x_{ij} à faire passer sur chaque arc $(i,j) \in A$ pour un coût total minimum.

Modèle pour le MCF

Soit d la quantité de flux à déplacer de s'à t.

En nous référant à la formulation (MCF) de ce problème, nous pouvons formuler plusieurs autres problèmes de flux.

(MCF) : min $\sum_{(i,j)\in A} c_{ij}x_{ij}$

Sujet à :
(conservation de flux)

$$\sum_{j\in P_i} x_{ij} - \sum_{j\in B_i} x_{ij} = \begin{cases} d & si\ i = s \\ 0 & si\ i \in N, i \neq s,t \\ -d & si\ i = t \end{cases}$$

(capacité)

$$l_{ij} \leq x_{ij} \leq u_{ij} \quad \forall (i,j) \in \mathrm{A}$$

Exemple MCF

Une compagnie va produire le même produit dans deux usines différentes.

Le produit doit être envoyé à deux entrepôts.

- L’usine 1 peut envoyer une quantité illimitée à l’entrepôt 1 par train
- l’usine 2 peut envoyer une quantité illimitée à l’entrepôt 2 par train.

On peut utiliser aussi des camions pour transporter jusqu’à 50 unités de produit de chaque usine à un centre de distribution.

Du centre de distribution (D), on peut transporter jusqu’à 50 unités de produit vers chaque entrepôt.

Exemple MCF (suite)

Le coût de transport par unité de produit pour chaque solution, les quantités de produits fabriqués à chaque usine (U1 et U2) et la quantité de produits requise à chaque entrepôt (E1 et E2) sont:

	D	$E1$	$E2$	Total produit
$U1$	3	7	−−	80
$U2$	4	−−	9	70
D	−−	2	4	−−
Requis	−−	60	90	150

Formuler ce problème comme un problème de flux à coût minimum avec deux nœuds sources et deux nœuds destinations.

Outils de Recherche Opérationnelle en Génie MTH 8414

Flux dans les réseaux

- Flux à coût minimum
- Plus court chemin
- Flux maximal
- Problèmes de transport
- Problèmes d'affectation
- Autres formulations
- Créations d'horaires

Louis-Martin Rousseau

Office: A520.21 Tel.: #4569
Louis-Martin.Rousseau@polymtl.ca

Problème du plus court chemin

Problème du plus court chemin d'une source s à une destination t (Shortest Path Problem)

Pour ce problème, une distance (ou longueur) est associée à chaque arc. Si nous considérons les distances des arcs comme les coûts associés au flux sur les arcs, alors le problème du plus court chemin de s à t peut se formuler comme un problème de flux à coût minimum pour déplacer 1 (une) unité de flux de s à t .

Modèle pour le SPP

Le problème se formule comme suit :

$$(\text{PCC}): \quad \min \sum_{(i,j)\in A} c_{ij}x_{ij}$$

Sujet à :
(conservation de flux)

$$\sum_{j\in P_i} x_{ij} - \sum_{j\in B_i} x_{ij} = \begin{cases} 1 & si\ i = s \\ 0 & si\ i \in N, i \neq s, t \\ -1 & si\ i = t \end{cases}$$

$$x_{ij} \geq 0, \qquad \forall (i,j) \in \mathrm{A}$$

Dans cette formulation, c_{ij} représente la distance (longueur) de l'arc *(i,j)*. De plus, $l_{ij} = 0\ \forall\ (i,j) \in A$, et les contraintes de capacité $x_{ij} \leq u_{ij}$ sont inutiles. La solution obtenue avec le simplexe est entière.

Exemple SPP

Au début de la première année (d'une période de 5 ans) vous achetez une machine neuve pour votre usine au coût de 12 000$. Le coût d'entretien annuel d'une machine de ce type dépend de son âge au début de l'année considérée te qu'indiqué ici:

Âge de la machine au début de l'année	Coût d'entretien annuel
0	2 000$
1	4 000 $
2	5 000 $
3	9 000 $
4	12 000 $

Exemple SPP (suite)

Pour éviter de payer des coûts d'entretien élevés avec une machine plus vieille, vous pouvez la vendre pour en acheter une neuve. Le prix de revente de la machine dépend aussi de son âge tel qu'indiqué ici :

Âge de la machine au début de l'année	Prix de revente
1	7 000$
2	6 000 $
3	2 000 $
4	1 000 $
5	0 $

Exemple SPP (suite)

Pour simplifier le problème, supposons que le prix d'achat d'une machine neuve reste toujours égal à 12 000 $.

Votre objectif est de minimiser votre coût net total (les coûts d'achats + les coûts d'entretien - les revenus de revente) au cours des 5 prochaines années (i.e., jusqu'à la fin de la cinquième année).

Formuler ce problème comme un problème de plus court chemin en représentant le réseau associé et en déterminant le coût associé à chaque arc.

Outils de Recherche Opérationnelle en Génie MTH 8414

Flux dans les réseaux

- Flux à coût minimum
- Plus court chemin
- Flux maximal
- Problèmes de transport
- Problèmes d'affectation
- Autres formulations
- Créations d'horaires

Louis-Martin Rousseau

Office: A520.21 Tel.: #4569
Louis-Martin.Rousseau@polymtl.ca

Problème de flux maximal

Problème de flux maximal (FM) d'une source s à une destination t. (Maximum Flow)

Soit un réseau où $l_{ij} = 0 \ \forall \ (i,j) \in A$, l'objectif est de déterminer la quantité maximale de flux qu'il est possible d'acheminer d'un nœud source $\boldsymbol{s}$ à un nœud destination $\boldsymbol{t}$ du réseau (maximiser $\boldsymbol{x_{ts}}$)

Exemple de MF

Big Oil veut expédier la quantité maximale de pétrole (par heure) via pipeline à partir du nœud s_0 au nœud s_i dans la figure ci-dessous qui décrit le réseau de distribution.

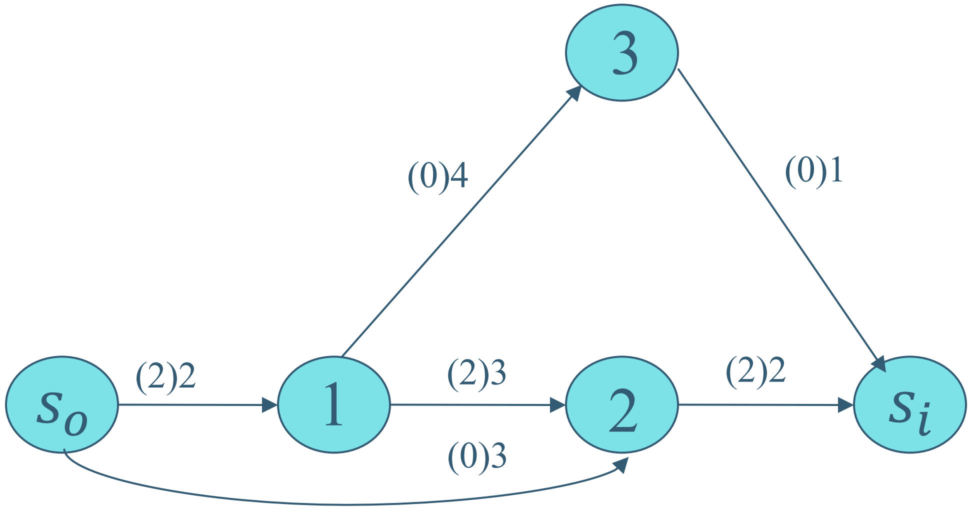
Les arcs dans la figure représentent les pipelines de différents diamètres.

Le nombre maximum de barils de pétrole (millions de barils par heure) pouvant être pompé au travers de chaque arc est donné dans le tableau.

Formuler ce problème comme un problème de MF pour déterminer le nombre maximum de barils de pétrole par heure qui doit être expédié de s_0 à s_i .

Exemple de MF (suite)

ARC	CAPACITÉ
$(s_o,1)$	2
$(s_o,2)$	3
$(1,2)$	3
$(1,3)$	4
$(3,s_i)$	1
$(2,s_i)$	2



(N.B.: les valeurs entre parenthèses sur les arcs représentent la solution actuelle).

Outils de Recherche Opérationnelle en Génie MTH 8414

Flux dans les réseaux

- Flux à coût minimum
- Plus court chemin
- Flux maximal
- Problèmes de transport
- Problèmes d'affectation
- Autres formulations
- Créations d'horaires

Louis-Martin Rousseau

Office: A520.21 Tel.: #4569
Louis-Martin.Rousseau@polymtl.ca

Quelques problèmes de flux

Problème de transport classique

Dans ce problème, nous considérons plusieurs sources et plusieurs destinations, et il n'y a pas de nœuds intermédiaires.

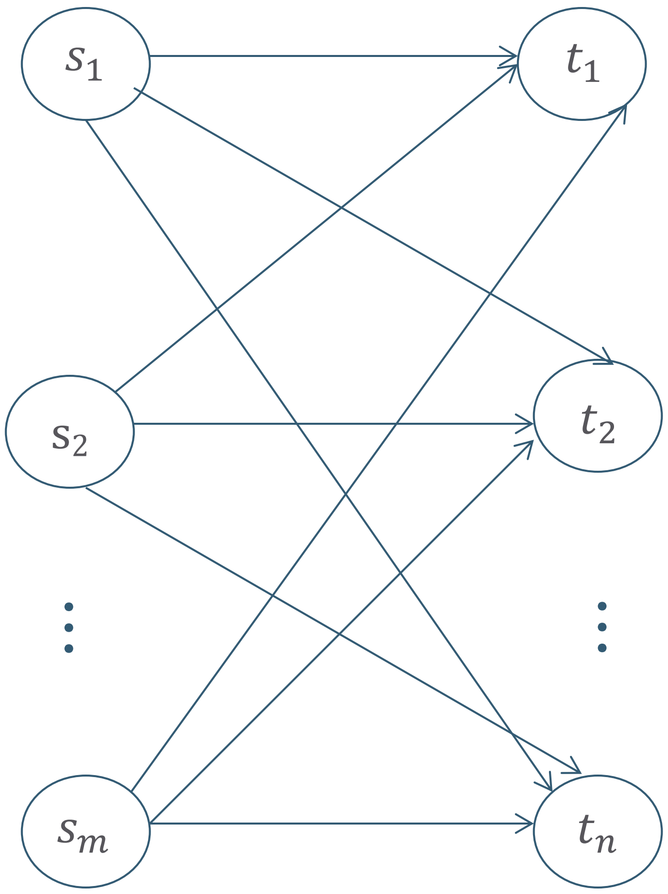
Ainsi ***N*** est partitionné en deux ensembles: ***S*** l'ensemble des nœuds source et ***T*** l'ensemble de nœuds destination:

$$N = S \cup T \qquad (\text{et } S \cap T = \emptyset)$$

De plus, l'ensemble $\boldsymbol{A}$ est constitué des arcs reliant les sources aux destinations. Un arc existe entre chaque pair source-destination:

$$A = \{\ (i,\ j): i \in S,\ j \in T\ \}$$

Problème de transport (exemple)



Problème de transport

Supposons qu'il y a ***m*** sources et ***n*** destinations.

Dénotons par

- x_{ij} le flux sur l'arc (s_i, t_j),
- O_i la quantité disponible à s_i
- d_j la quantité requise à t_j .
- c_{ij} le coût unitaire de transport sur l'arc (s_i, t_j).

Formulons le problème de transport (PT) où nous devons déterminer la quantité à transporter de chaque origine à chaque destination en respectant les disponibilités et en satisfaisant les demandes de façon à minimiser le coût total de transport.

Modèle mathématique

(TP) : $\min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$

Sujet à :
(disponibilités)

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = O_i, \qquad 1 \leq i \leq m$$

(demandes)

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = d_j, \qquad 1 \leq j \leq n$$

$$x_{ij} \geq 0$$

Outils de Recherche Opérationnelle en Génie MTH 8414

Flux dans les réseaux

- Flux à coût minimum
- Plus court chemin
- Flux maximal
- Problèmes de transport
- Problèmes d'affectation
- Autres formulations
- Créations d'horaires

Louis-Martin Rousseau

Office: A520.21 Tel.: #4569
Louis-Martin.Rousseau@polymtl.ca

Quelques problèmes de flux

Problème d’affectation (Assignment Problem)

Le problème d’affectation peut s’énoncer comme suit :

- Étant donné ***n*** candidats pour remplir ***n*** postes, et des coûts d’affectation des candidats aux postes, déterminer l’affectation de chaque candidat à un et un seul poste pour minimiser le coût total des affectations.

Soit c_{ij} le coût d’affecter le candidat ***i*** au poste ***j***. Les variables de décision x_{ij} sont spécifiées comme suit :

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \text{ est affecté à } j \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

Modèle pour le AP

Formulons le problème pour trouver l'affectation des candidats aux postes minimisant le coût total.

$$(\mathrm{AP}):\qquad \min \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

Sujet à :

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \qquad 1 \le i \le n$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \qquad 1 \le j \le n$$

$$x_{ij} = 0\ ou\ 1, \qquad 1 \le i \le n, 1 \le j \le n$$

Propriété intéressante

Ce problème *(AP)* est un cas particulier du problème de transport (*TP*) où $m = n, 0_i = 1 \ (1 \leq i \leq n)$ et $d_j = 1 \ (1 \leq j \leq n)$.

Les sources de disponibilité sont les candidats et les destinations sont les postes.

Puisque la solution optimale obtenue pour un problème de transport avec le simplexe est entière, nous pouvons remplacer les contraintes $x_{ij} = 0$ ou 1 par $x_{ij} \geq 0$.

Exemple AP

Machineco possède 4 machines et 4 tâches doivent être accomplies. Chaque machine doit être assignée à accomplir une seule tâche. Le temps requis de démarrage de chaque machine pour accomplir chaque tâche est donné dans la table ci-dessous. Machineco veut minimiser le temps total de « *setup* » nécessaire pour accomplir les 4 tâches. Formuler un problème de PL pour résoudre ce problème.

	TEMPS (Heures)			
	Job 1	Job 2	Job 3	Job 4
Machine 1	14	5	8	7
Machine 2	2	12	6	5
Machine 3	7	8	3	9
Machine 4	2	4	6	10

Autres problèmes de flux

Il existe d’autres problèmes de flux ou la solution d’un programme linéaire ne donne pas nécessairement une solution entière

- Flux généralisé
- Multiflux

flux maximal généralisé

POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

(FMG): $\qquad\qquad \max \quad v_s$

Sujet à :

(conservation de flux)

$$\sum_{j \in P_i} x_{ij} - \sum_{j \in B_i} r_{ji} x_{ji} = \begin{cases} v_s & \text{si} \quad i = s \\ 0 & \text{si} \quad i \in N \quad i \neq s,\ t, \\ -v_t & \text{si} \quad i = t \end{cases}$$

(capacité)

$$0 \leq x_{ij} \leq u_{ij} \quad \forall (i,\ j) \in A.$$

Multiflux (ou flux à plusieurs commodités)

Soit k l'indice des commodités

$$(MF): \qquad \min \quad \sum_{k=1}^{r} \sum_{(i,j)\in A} c_{ij}^k x_{ij}^k$$

Sujet à :

(conservation de flux)

$$\sum_{j\in P_i} x_{ij}^k - \sum_{j\in B_i} x_{ji}^k = \left\{ \; b_i^k \quad \forall i \text{ et } k \right.$$

(capacité)

$$\sum_{\mathrm{k}=1}^{r} x_{ij}^k \leq u_{ij} \quad \forall (i,\ j) \in A$$

$$0 \leq x_{ij}^k \leq u_{ij}^k \quad \forall (i,\ j) \in A \text{ et } k.$$