Outils de Recherche Opérationnelle en Génie - MTH 8414

Programmation Linéaire :
Astuces de modélisation

Résumé

- Les problèmes ne se présentent pas toujours sous une forme qui soit naturellement linéaire.

- Toutefois comme la PL est une technique très efficace, il est souvent avantageux de « reformuler » un problème de manière à ce qu’il soit linéaire.

- On présente donc ici quelques trucs et astuces en vrac…

- À noter que leur efficacité dépend de chaque solveur et de leur capacité à effectuer un prétraitement sur les modèles.

- Cette section est tirée du chapitre 6 du livre AIMMS-modeling.

Valeur absolue: un exemple

- La valeur absolue représente souvent une *déviation* (un écart positif ou négatif) par rapport à une cible souhaitée.
- Prenons l'exemple d'une régression linéaire:
  - On veut déterminer la droite qui permet le mieux possible d'expliquer un ensemble de points (v_j, w_j)
  - Les coefficients de la droite sont donnés par a et b de sorte que $w = av + b$ (a est la pente de la droite et b est l'ordonnée à l'origine).
  - Le problème de la régression linéaire est posé comme suit :

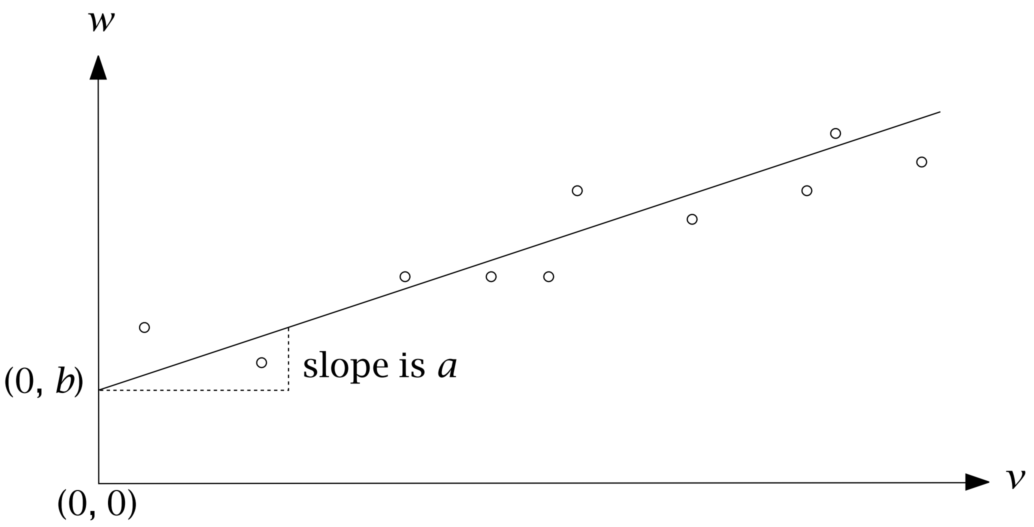
Minimize: $f(z)$

Subject to:

$$w_j = av_j + b - z_j \qquad \forall j \in J$$

Valeur absolue: un exemple

- Dans ce modèle z_j représente la différence entre $av_j + b$ (la prédiction de la droite) et w_j (l'observation réelle). C'est en quelque sorte l'erreur d'approximation par une droite.



- On minimise $f(z)$, une fonction de l'erreur qui peut être :
  - La somme des carrés $\quad f(z) = \sum_{j \in J} z_j^2$
  - La somme des valeurs absolues $\quad f(z) = \sum_{j \in J} |z_j|$
  - L'erreur maximale $\quad f(z) = \max_{j \in J} |z_j|$

Minimize: $\quad f(z)$

Subject to:

$$w_j = av_j + b - z_j \qquad \forall j \in J$$

Valeur absolue

Soit le problème linéaire suivant (le signe $\lesseqgtr$ signifie $\leq$ ou $\geq$) :

$$\text{Minimize} \quad \sum_{j \in J} x_j \, |c_j| \qquad\qquad c_j > 0$$

$$\text{Subject to} \quad \sum_{j \in J} a_{ij} \, x_j \lesseqgtr b_j \qquad\qquad \forall i \in I$$

$$x_j \ \text{libre}$$

- La valeur absolue n’étant pas une fonction linéaire, il faut trouver une manière de s’en débarrasser…

Objectif minimax

Considérons le modèle suivant (le signe $\lesseqgtr$ signifie $\leq$ ou $\geq$):

$$\min \quad \max_{k \in K} \sum_{j \in J} c_{kj} x_j$$

subject to

$$\sum_{j \in J} a_{ij} x_j \gtreqless b_i \qquad \forall i \in I$$

$$x_j \geq 0 \qquad \forall j \in J$$

- Si par exemple on a $K = \{1,2,3\}$ et $J = \{1,2\}$ alors l'objectif sera :
  - Minimiser $\max(c_{11}x_1 + c_{12}x_2,\ c_{12}x_2 + c_{22}x_2, c_{31}x_1 + c_{32}x_2)$

- On retrouve ce type de problème lorsqu'on veut réduire le pire cas, comme l'erreur maximum, la violation maximale, etc.

Objectif fractionnaire

Considérons le modèle suivant :

$$\min \quad \left(\sum_{j\in J} c_j x_j + \alpha\right) \Big/ \left(\sum_{j\in J} d_j x_j + \beta\right)$$

subject to.

$$\sum_{j\in J} a_{ij} x_j \leqslant b_i \qquad \forall i \in I$$

$$x_j \geq 0 \qquad \forall j \in J$$

- Ici nous avons un ratio de deux termes linéaires, et tout le reste du modèle est linéaire. Il faut donc transformer l'objectif.
- On retrouve ce genre de modèle lorsqu'on traite des données financières par exemple (taux de rendement).