Devoir 2 : Réseaux et programmation en nombres entiers

Correction

Question 1

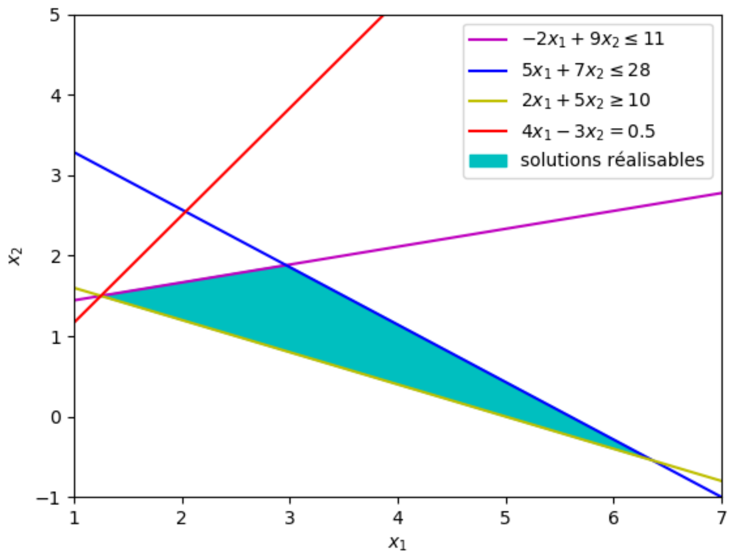

FIGURE 1 – Représentation graphique du problème

1. La relaxation linéaire donne comme solution optimale $\frac{1}{2}$ avec $x_1 = \frac{5}{4}$ et $x_2 = \frac{3}{2}$.

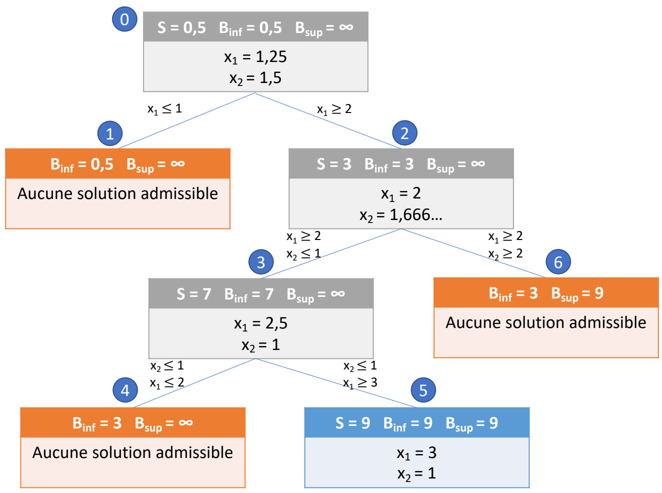

FIGURE 2 – Arbre de recherche du *branch-and-bound*

2.

3. La solution optimale du problème est 9 et est obtenue avec $x_1 = 3$ et $x_2 = 1$.
4. On aurait pu commencer par brancher sur x_2, on aurait trouvé le même résultat mais notre arbre de recherche aurait alors eu une hauteur diminuée de 1.

Question 2

1. On peut représenter le problème sur le réseau suivant :

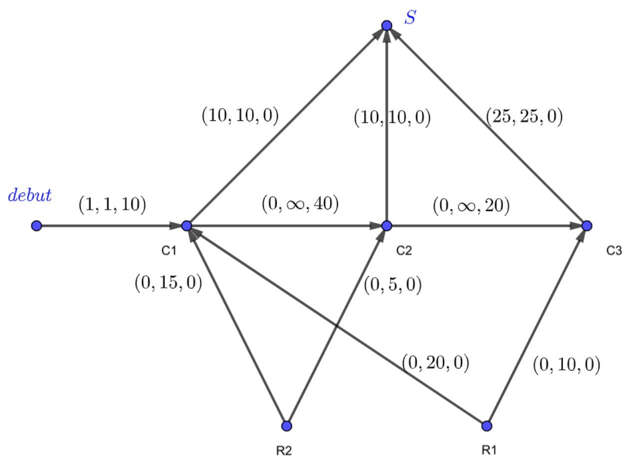

FIGURE 3 – Ecriture du problème sous forme de réseau

Les noeuds C_1, C_2 et C_3 représentent les différentes étapes du parcours. Les arcs reliant le noeud R_1 (resp. R_2) aux étapes modélisent les quantités de fromage acquises par la méthode R_1 (resp. R_2) au cours des différentes étapes. Le noeud S sert à modéliser ce qui est consommé à chaque étape. Le flux passant sur l'arc (C_i, S) représente ce qui est consommé par nos rats à l'étape i.

2. D'après le réseau, on a un ensemble de 7 nœuds $N = [debut,\ C_1,\ C_2,\ C_3,\ R_1,\ R_2,\ S]$ que l'on numérote de 1 à 7. Ainsi, l'ensemble des 10 arcs est $A = [(1,\ 2),\ (2,\ 3),\ (2,\ 7),\ (3,\ 4),\ (3,\ 7),\ (4,\ 7),\ (5,\ 2),\ (5,\ 4),\ (6,\ 2),\ (6,\ 3)]$.

   Variables : Pour chaque arc reliant un nœud i à un nœud j, on note x_{ij} la variable du flux circulant sur cet arc, c'est-à-dire le nombre de portions de fromage.

   Paramètres : À chaque arc est associé un triplet $(l_{ij},\ u_{ij},\ c_{ij})$ donnant respectivement une borne inférieure sur x_{ij}, la capacité de l'arc et le coût unitaire du flux qui y circule.

   La matrice de ces triplets est : $\begin{bmatrix} \times & (1,1,10) & \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & (0,\infty,40) & \times & \times & \times & (25,25,0) \\ \times & \times & \times & (0,\infty,20) & \times & \times & (10,10,0) \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times & (25,25,0) \\ \times & (0,20,0) & \times & (0,10,0) & \times & \times & \times \\ \times & (0,15,0) & (0,5,0) & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times \end{bmatrix}$

   Pour tous les arcs, on impose que le flux soit positif.
   Pour les arcs (1, 2), (2, 3) et (3, 4), le coût correspond au coût de transport tel qu'il est donné dans la Table 1. Pour les autres arcs, le coût est nul.
   Pour les arcs (2, 7), (3, 7), et (4, 7), la borne inférieure et la capacité sont égales au besoin en fromage de la Table 2 car ces arcs modélisent la consommation des portions de fromage.
   Pour les arcs (5, 2), (5, 4), (6, 2) et (6, 3), la capacité correspond à la quantité de fromage

disponible pour chaque méthode à chaque étape donnée dans la Table 1 car ces arcs modélisent l'approvisionnement en portions de fromage. On a choisi de ne pas représenter les arcs ayant une capacité nulle, c'est-à-dire R_1 à l'étape 2 et R_2 à l'étape 3.

Fonction objectif :

$$\min \sum_{(i,j)\in A} c_{ij} \times x_{ij}$$

Cette somme correspond au coût total du flux de fromage circulant dans notre réseau. On souhaite ici que les rats subviennent à leur besoin en portant le moins de fromage possible, on veut donc **minimiser** cette somme, on est bien dans un problème de flux à coût minimum.

Contraintes :

— $\forall\ (i,j) \in A,\ l_{ij} \leq x_{ij} \leq u_{ij}$
Le flux circulant sur chaque arc doit se trouver entre les bornes correspondantes.

— $\forall\ 2 \leq i \leq 4,\ \sum_{j,(i,j)\in A} x_{ij} = \sum_{j,(j,i)\in A} x_{ji}$
Le flux sortant d'un nœud doit être égal au flux qui y entre, il y a conservation du flux. Cette contrainte ne s'applique qu'aux nœuds 2, 3 et 4 car ce sont les nœuds des trois étapes du chemin des rats.

3. On peut résoudre facilement ce problème à la main en remontant les étapes à l'envers. Puisqu'on cherche à minimiser les coûts de transport, il est clair que la solution optimale impose que les rats emportent juste ce qu'il faut pour passer l'étape 3, *ie* après la dernière étape, leurs réserves doivent être vides. On applique ce raisonnement à chaque étape. Il faut donc :

— récupérer 10 unités de fromage à l'étape 3 et avoir en stock 15 unités pour répondre au besoin,

— à l'étape 2, ils doivent donc économiser ces 15 unités. Il doivent aussi en consommer 10, il faut donc qu'ils récupèrent les 5 unités disponibles et qu'ils aient 20 unités de stock pour leurs économies et leurs besoins.

— à l'étape 1, il faut donc qu'ils récupèrent 29 unités, pour en consommer 10 et en stocker 20 pour les étapes suivantes.

On peut résumer cette solution en écrivant en rouge la valeurs des flots sur le graphe suivant :

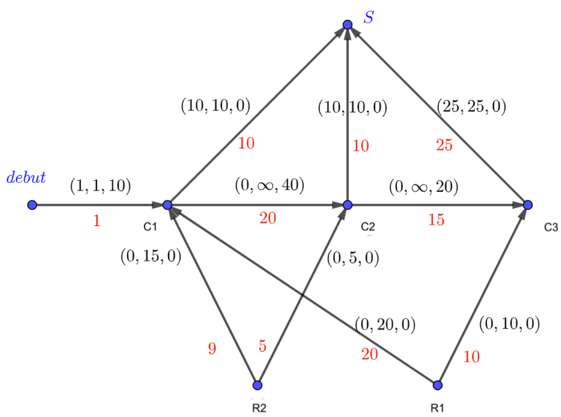

FIGURE 4 – Solution optimale au problème

4. En résolvant le problème sur MiniZinc, on obtient comme liste de flux [1, 20, 10, 15, 10, 25, 20, 10, 9, 5] et le coût optimal est 1110. Cette solution est la même que ce qu'on avait trouvé précédemment mais elle n'est pas unique. En effet, toute solution faisant entrer 29 portions de fromage dans le nœud 2 tout en respectant les bornes des arcs (6, 2) et (5, 2) est également optimale. Ainsi, la liste de flux [1, 20, 10, 15, 10, 25, 14, 10, 15, 5] est une autre solution optimale. D'après la première solution que nous avons donnée, Razmo doit voler 20 portions de fromage à l'étape 1 et Rapido doit en voler 9. À l'étape 2, Rapido doit voler 5 portions de fromage. Enfin, à l'étape 3, il faut que Razmo vole 10 portions de fromage.
5. Il suffit de réduire chaque coût de 5 dans MiniZinc, le côut minimum de la solution retournée est de 930. Ils ont donc fait une économie de $1110 - 930 = 180$. S'ils estiment vouloir payer une pièce par pénibilité évitée, alors la souris est rentable. En fait, la souris sera rentable jusqu'à une pièce pour deux pénibilités évitées. Au delà de ce prix, elle ne serait plus rentable.
6. Si on impose aux rats de ne pas transporter plus de 15 portions entre les étapes, le problème devient impossible à résoudre. En effet, pour les étapes 2 et 3, les rats ont un besoin total de 35 portions. Or ils arrivent maintenant à l'étape 2 avec au plus 15 portions et ils ne peuvent en récuperer que 15 de plus en tout aux étapes 2 et 3, ce qui fait un total que 30 et qui est insuffisant.