MEC6212 : Génération de maillages

MAILLAGES NONSTRUCTURÉS

Ricardo Camarero et Julien Dompière
Département de génie mécanique

28 février 2025

POLYTECHNIQUE MONTRÉAL
LE GÉNIE EN PREMIÈRE CLASSE

Motivation et contexte

Concepts de base et historique

Maillages Structurés/curvilignes : :

- *méthodes algébriques : transformations conformes, interpolation transfinie ;*
- *méthodes EDP : Elliptiques (Winslow), hyperboliques.*

Maillages non-structurés :

- *Triangulation de Delaunay*
- *méthode de Delaunay, retournement d'arêtes ;*
- *méthode d'avance de front.*

Maillages Hybrides :

- *décomposition spatiale : multiblocs, hiérarchique.*

Table des matières

Structure des maillages

L'information caractérisant un maillage comprend deux types :

la géométrie ➜ *les sommets (des coordonnées* (x, y, z)*) ;*
le voisinage ➜ *la connectivité entre les sommets.*

$\boxed{\text{Structuré}}$ **la connectivité est implicite :**

$\boxed{\text{Nonstructuré}}$ **la connectivité est explicite :**

Structure des maillages

L'information caractérisant un maillage comprend deux types :

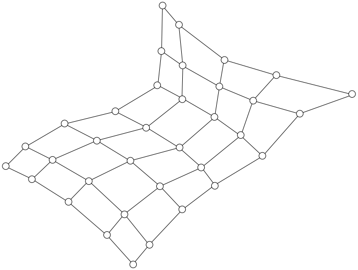
la géométrie ➜ *les sommets (des coordonnées* (x, y, z)*) ;*
le voisinage ➜ *la connectivité entre les sommets.*

Structuré **la connectivité est implicite :**
il existe une relation d'ordre implicite qui permet de déduire les voisins directement à partir de la connaissance de la maille locale (c-à-d N_i, N_j [et N_k]).
Les éléments sont des quadrangles (2d) ou des hexaèdres (3d).

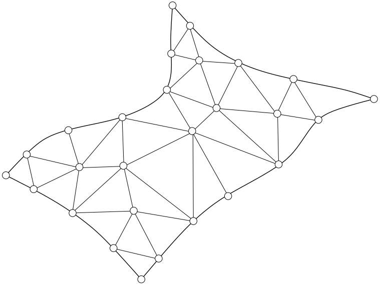
Nonstructuré **la connectivité est explicite :**
il faut la préciser lors de la construction des éléments.
En général, les maillages non structurés sont composés de triangles en 2D et de tétraèdres en 3D, mais d'autres formes sont possibles.

Pour une même géométrie

Structuré :

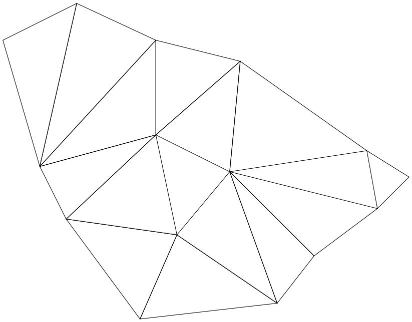


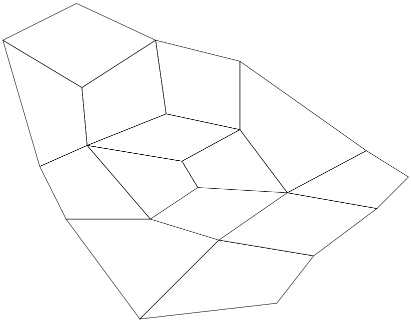
Nonstructuré :



Formes des éléments nonstructurés

En général, les maillages <u>non-structurés</u> sont composés de triangles, mais en 2D des quadrilatères sont également possibles.





Critique des maillages nonstructurés

➜ **Comme la connectivité est explicite, celle-ci,**

- *doit être construite lors du processus de génération du maillage ;*
- *nécessite plus d'espace mémoire et d'espace disque.*
- *contient plus d'éléments pour le même nombre de sommets qu'un maillage structuré.*

Critique des maillages nonstructurés

➜ **Comme la connectivité est explicite, celle-ci,**

- *doit être construite lors du processus de génération du maillage ;*
- *nécessite plus d'espace mémoire et d'espace disque.*
- *contient plus d'éléments pour le même nombre de sommets qu'un maillage structuré.*

➜ **Il n'y a pas d'ordre, alors,**

- *les calculs utilisent un nombre variable de voisins autour d'un sommet ;*
- *les maillages sont plus difficiles à générer, à visualiser, à développer ;*
- *les opérations géométriques sont plus complexes (localisation, distance à la paroi etc...)*

Critique des maillages nonstructurés

➜ **Comme la connectivité est explicite, celle-ci,**

- *doit être construite lors du processus de génération du maillage ;*
- *nécessite plus d'espace mémoire et d'espace disque.*
- *contient plus d'éléments pour le même nombre de sommets qu'un maillage structuré.*

➜ **Il n'y a pas d'ordre, alors,**

- *les calculs utilisent un nombre variable de voisins autour d'un sommet ;*
- *les maillages sont plus difficiles à générer, à visualiser, à développer ;*
- *les opérations géométriques sont plus complexes (localisation, distance à la paroi etc...)*

➜ **Les résoluteurs,**

- *utilisent des structures de données plus complexes ;*
- *sont plus lents pour la manipulation des voisins.*

Pour la génération de maillages pour des applications industrielles, on recherche des mailleurs qui :

$\boxed{\textbf{Automatique}}$

$\boxed{\textbf{Robuste}}$

$\boxed{\textbf{Générique}}$

$\boxed{\textbf{Adaptation}}$

Pour la génération de maillages pour des applications industrielles, on recherche des mailleurs qui :

Automatique *minimisent les intéractions avec l'usager. Généralement, les mailleurs sont dédiés à un type particulier (structuré, nonstructuré ...) et l'usager donne les paramètres pertinents à ce type. Idéalement, on recherche une utilisation de type "menu-bouton" !*

Robuste *valident les paramètres de contrôle et vérifient selon chaque méthode.*

Générique *utilisent un même algorithme, que le modèle géométrique à mailler soit simple ou complexe.*

Adaptation *permettent de contrôler localement la densité et l'élancement des mailles.*

Potentiel des maillages nonstructurés

On retrouve ces mêmes fonctionalités à divers degrés dans les mailleurs structurés et nonstructurés.

Potentiel des maillages nonstructurés

On retrouve ces mêmes fonctionalités à divers degrés dans les mailleurs structurés et nonstructurés.

Cependant,

1. **les mailleurs nonstructurés offrent des avantages définitifs en ce qui concerne,**
   - *la représentation de géométries topologiquement complexes ;*
   - *le contrôle local de la densité du maillage ;*
   - *la possibilité d'adaptation.*

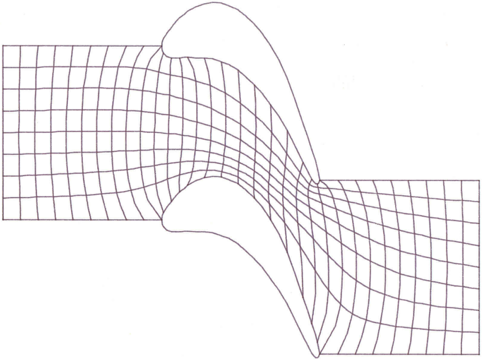
Potentiel des maillages nonstructurés

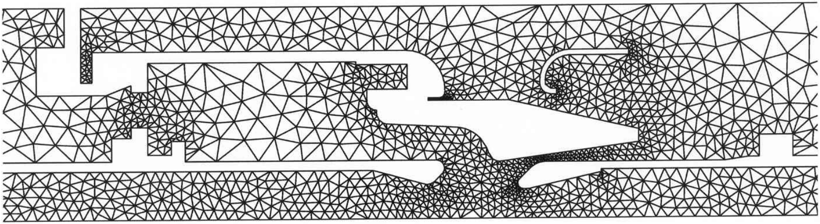
On retrouve ces mêmes fonctionalités à divers degrés dans les mailleurs structurés et nonstructurés.

Cependant,

1. **les mailleurs nonstructurés offrent des avantages définitifs en ce qui concerne,**
   - *la représentation de géométries topologiquement complexes ;*
   - *le contrôle local de la densité du maillage ;*
   - *la possibilité d'adaptation.*
2. **les ordinateurs et l'informatique évoluant, la complexité du non structuré n'est plus un facteur limitatif.**

Maillages nonstructurés : pourquoi ?





Modèles géométrique et topologique

Un modèle géométrique provenant d'un système CAO comprend plusieurs entités : sommets, arêtes, faces et des volumes.

On les regroupe selon :

la géométrie :

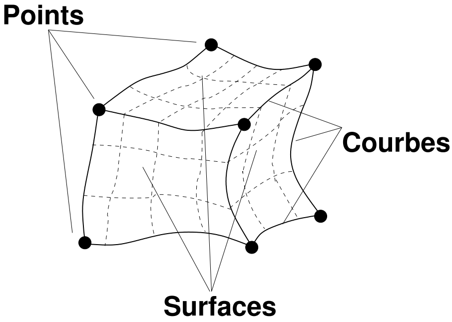
la topologie :

Modèles géométrique et topologique

Un modèle géométrique provenant d'un système CAO comprend plusieurs entités : sommets, arêtes, faces et des volumes.

On les regroupe selon :

la géométrie : description de la position et de la forme des objets du modèle dans l'espace physique en 3D.



la topologie :

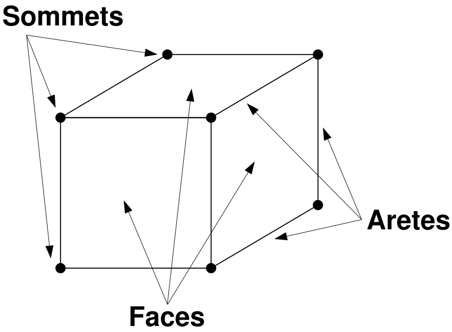
Modèles géométrique et topologique

Un modèle géométrique provenant d'un système CAO comprend plusieurs entités : sommets, arêtes, faces et des volumes.

On les regroupe selon :

la géométrie : description de la position et de la forme des objets du modèle dans l'espace physique en 3D.

la topologie : connexions ou liens entre les objets du modèle.



Modèles géométrique et topologique

Un modèle géométrique provenant d'un système CAO comprend plusieurs entités : sommets, arêtes, faces et des volumes.

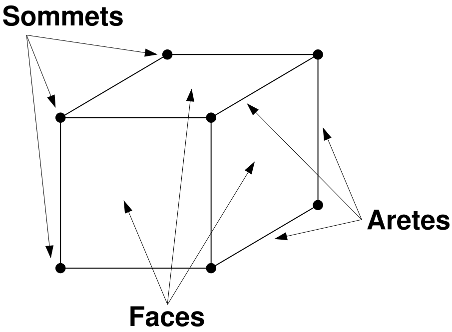
On les regroupe selon :

la géométrie : description de la position et de la forme des objets du modèle dans l'espace physique en 3D.

➜ des nombres réels.

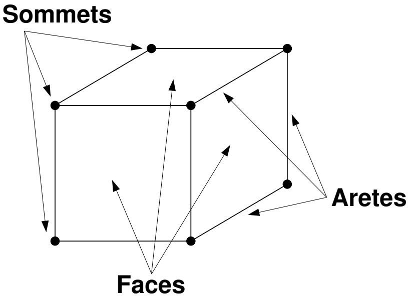
la topologie : connexions ou liens entre les objets du modèle.

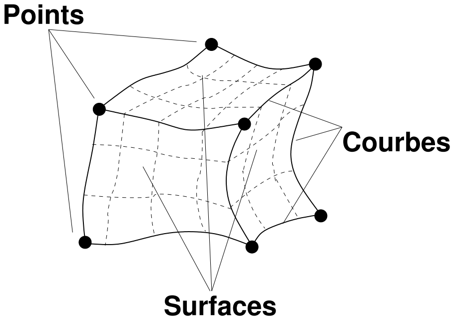
➜ des entiers ou des pointeurs.



Liens entre la topologie et la géométrie

sommets	➜	points
arêtes	➜	courbes
faces	➜	surfaces





Conformité topologique d'un maillage

1. **La topologie d'un maillage** *est un graphe des connexions entre les sommets du maillage, sans égard à leurs coordonnées* $(x, y, z)^T$.

2. **La conformité topologique** *est l'ensemble des conditions à respecter pour que ce graphe soit effectivement le graphe d'un maillage :*

Conformité topologique d'un maillage

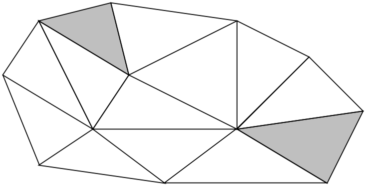
1. **La topologie d'un maillage** *est un graphe des connexions entre les sommets du maillage, sans égard à leurs coordonnées* $(x, y, z)^T$.
2. **La conformité topologique** *est l'ensemble des conditions à respecter pour que ce graphe soit effectivement le graphe d'un maillage :*
   - *Les sommets du graphe sont groupés par sous-ensembles, appellés éléments, de trois (triangle) ou quatre (quadrilatère) en 2D, quatre (tétraèdre), cinq (pyramide), six (prisme) ou huit (hexaèdre) en 3D.*
   - *Tout élément/cellule* K *d'une triangulation* $\mathcal{T}$ *est d'intérieur topologiquement non vide, c-à-d chaque élément est composé de sommets différents.*

Recouvrement

L'intersection topologique de deux éléments d'une triangulation $\mathcal{T}$ doit être, soit :

Recouvrement

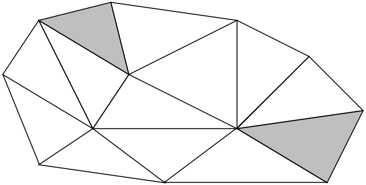
L'intersection topologique de deux éléments d'une triangulation $\mathcal{T}$ doit être, soit :



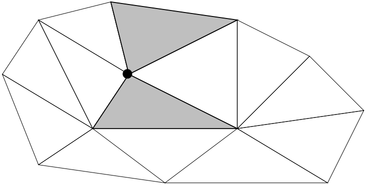
(e) Un ensemble vide

Recouvrement

L'intersection topologique de deux éléments d'une triangulation $\mathcal{T}$ doit être, soit :



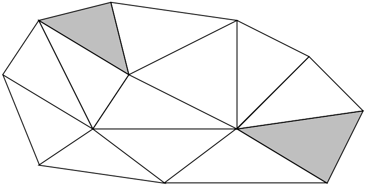
(i) Un ensemble vide



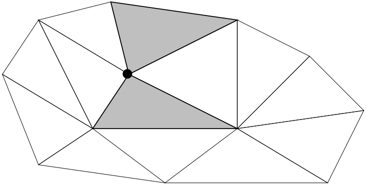
(j) Un sommet

Recouvrement

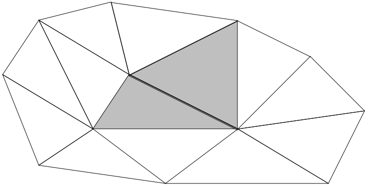
L'intersection topologique de deux éléments d'une triangulation $\mathcal{T}$ doit être, soit :



(m) Un ensemble vide



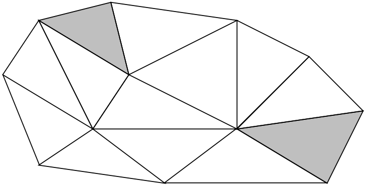
(n) Un sommet



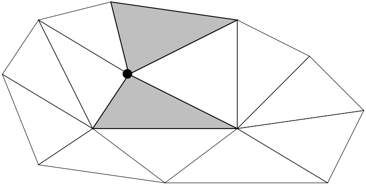
(o) Une arête (2 sommets)

Recouvrement

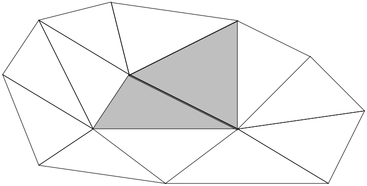
L'intersection topologique de deux éléments d'une triangulation $\mathcal{T}$ doit être, soit :



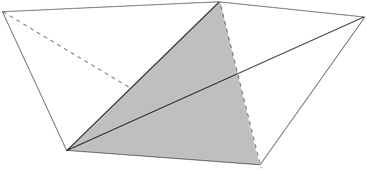
(q) Un ensemble vide



(r) Un sommet



(s) Une arête (2 sommets)

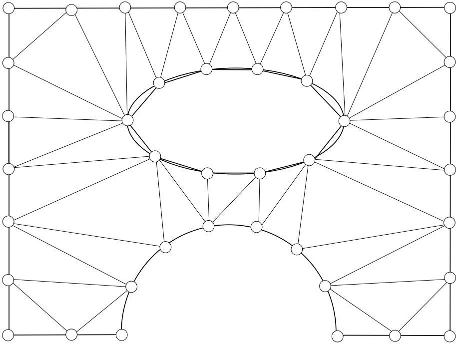


(t) Une face en 3d

Frontière d'un maillage

La frontière du graphe est l'ensemble des arêtes en 2D et des faces en 3D qui n'appartiennent qu'à un seul élément.

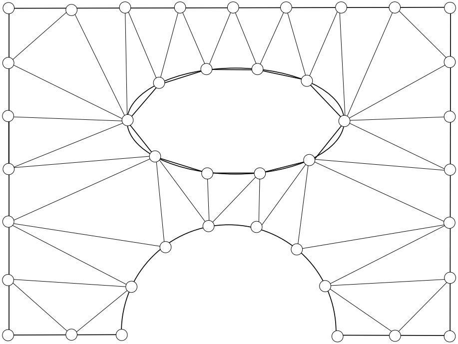
1. *En 2D, chaque arête frontière détermine les sommets frontière.*
2. *En 3D, chaque face frontière détermine les arêtes frontière et les sommets frontière.*
3. *Tout ce qui appartient à la frontière doit se décomposer en sous-ensembles connexes.*



Frontière d'un maillage

La frontière du graphe est l'ensemble des arêtes en 2D et des faces en 3D qui n'appartiennent qu'à un seul élément.

1. *En 2D, chaque arête frontière détermine les sommets frontière.*
2. *En 3D, chaque face frontière détermine les arêtes frontière et les sommets frontière.*
3. *Tout ce qui appartient à la frontière doit se décomposer en sous-ensembles connexes.*

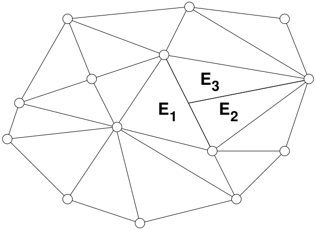


Le nombre de ces sous-ensembles (<u>boucles</u>) correspond au nombre de trous du domaine plus un.

✔ C'est bien le cas !

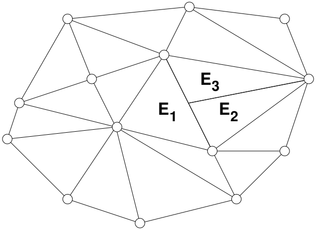
Maillages non conformes

Comment caractériser cette triangulation $\mathcal{T}$?



Maillages non conformes

Comment caractériser cette triangulation $\mathcal{T}$?

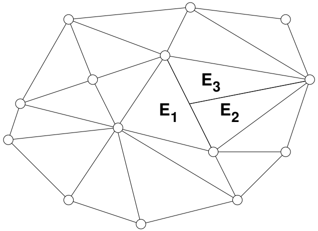


1ère interprétation : *L'élément $E2$ partage une demi-arête avec $E1$, et l'élément $E3$ partage l'autre demi-arête avec $E1$, laissant un sommet isolé au centre de l'arête correspondante de $E1$.*

✘ L'ensemble est un maillage non conforme !

Maillages non conformes

Comment caractériser cette triangulation $\mathcal{T}$?

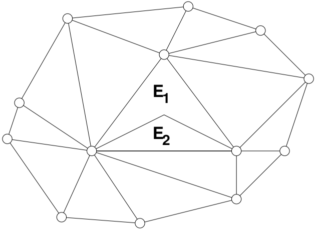


1ère interprétation : *L'élément $E2$ partage une demi-arête avec $E1$, et l'élément $E3$ partage l'autre demi-arête avec $E1$, laissant un sommet isolé au centre de l'arête correspondante de $E1$.*
✘ **L'ensemble est un maillage non conforme !**

2ème interprétation : *$E1$ est un quadrangle avec deux arêtes colinéaires.*
✔ **C'est un maillage hybride !**

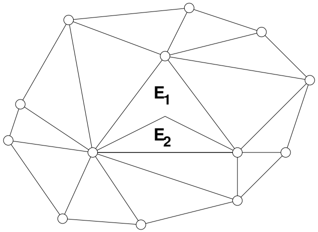
Maillage non conforme

Comment caractériser cette triangulation $\mathcal{T}$?



Maillage non conforme

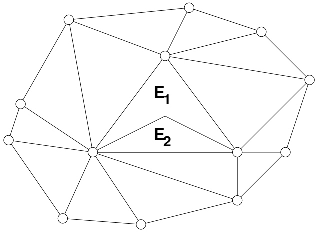
Comment caractériser cette triangulation $\mathcal{T}$?



1ère interprétation : *Les éléments $E1$ et $E2$ sont superposés.*

Maillage non conforme

Comment caractériser cette triangulation $\mathcal{T}$?

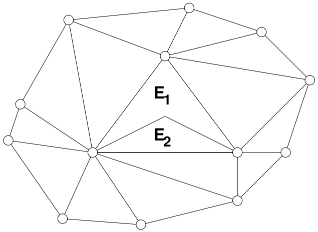


1ère interprétation : *Les éléments $E1$ et $E2$ sont superposés.*

✘ **Dans ce cas, ce n'est pas un maillage !**

Maillage non conforme

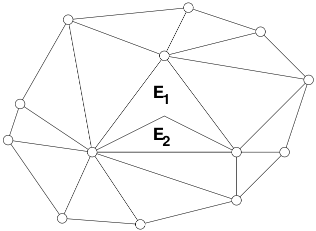
Comment caractériser cette triangulation $\mathcal{T}$?



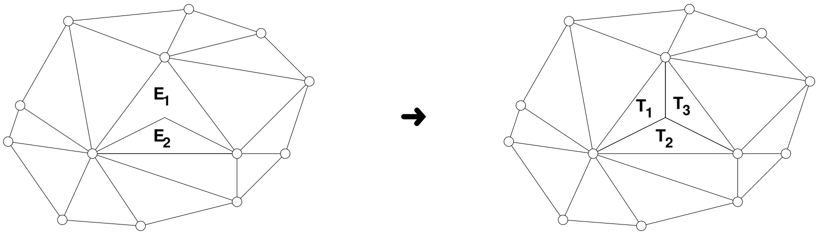
1ère interprétation : *Les éléments* $E1$ *et* $E2$ *sont superposés.*
✘ Dans ce cas, ce n'est pas un maillage !

2ème interprétation : $E1$ est un quadrangle (chevron) .
✔ Ceci est un maillage hybride puisqu'il contient deux types d'éléments !

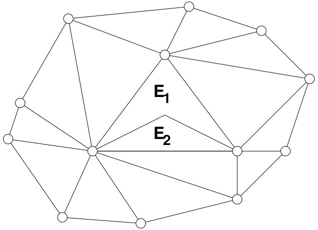
Rendre un maillage topologiquement conforme ?



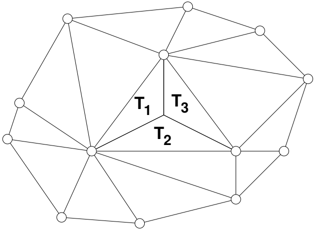
Rendre un maillage topologiquement conforme ?

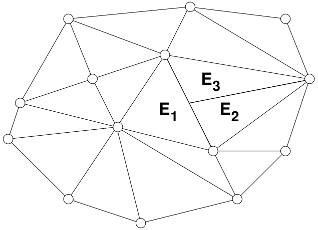


Rendre un maillage topologiquement conforme ?



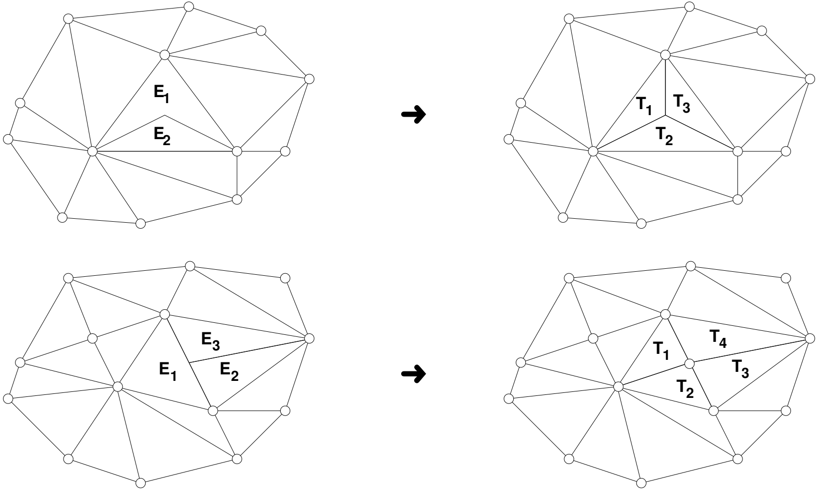
➜



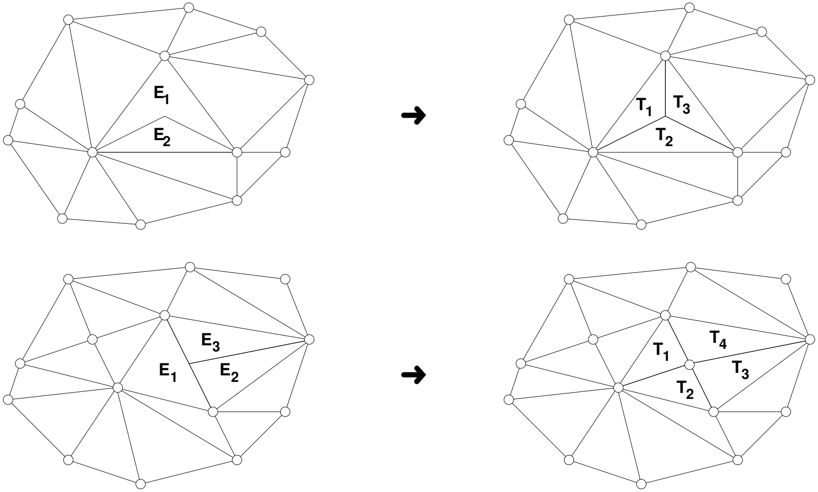


➜

Rendre un maillage topologiquement conforme ?



Rendre un maillage topologiquement conforme ?



Ces deux maillages deviennent topologiquement conformes en changeant seulement la connectivité entre les sommets.

Conformité géométrique

Le maillage $\mathcal{T}$ est un recouvrement du domaine Ω, et constitue une discrétisation valide du domaine pour fins de calculs si il couvre l'ensemble du domaine, sans laisser de trous, ni chevauchement des éléments :

1. $\overline{\Omega} = \cup_{K \in \mathcal{T}} K$, *l'union des éléments* K *de* $\mathcal{T}$, *est égal à l'adhérence du domaine* Ω, *c-à-d, tous les éléments* K *sont à l'intérieur de frontières du domaine.*
2. *L'intersection géométrique de deux éléments de* $\mathcal{T}$ *doit être soit :*
   - *un ensemble vide,*
   - *un sommet,*
   - *une arête,*
   - *une face,*
   - *rien d'autre.*

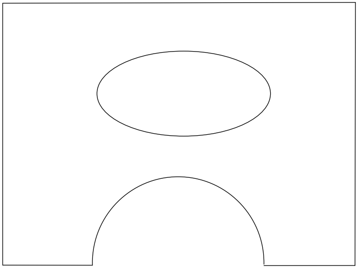
Conformité géométrique

Le maillage $\mathcal{T}$ est un recouvrement du domaine Ω, et constitue une discrétisation valide du domaine pour fins de calculs si il couvre l'ensemble du domaine, sans laisser de trous, ni chevauchement des éléments :

1. $\overline{\Omega} = \cup_{K \in \mathcal{T}} K$, *l'union des éléments* K *de* $\mathcal{T}$, *est égal à l'adhérence du domaine* Ω, *c-à-d, tous les éléments* K *sont à l'intérieur de frontières du domaine.*
2. *L'intersection géométrique de deux éléments de* $\mathcal{T}$ *doit être soit :*
   - *un ensemble vide,*
   - *un sommet,*
   - *une arête,*
   - *une face,*
   - *rien d'autre.*
3. **Tout élément K de $\mathcal{T}$ est d'aire (en 2D) ou de volume (en 3D) strictement positif.**

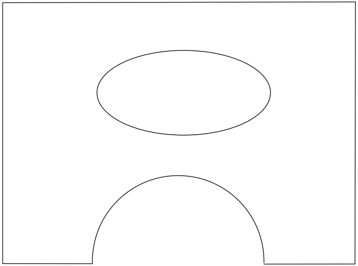
Première condition

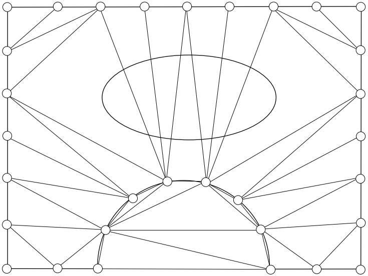
Le maillage doit <u>recouvrir</u> la partie du domaine délimitée par les frontières, et <u>exclure</u> les parties qui se situent en dehors du domaine, notament les trous et les parties concaves des frontières.



Première condition

Le maillage doit recouvrir la partie du domaine délimitée par les frontières, et exclure les parties qui se situent en dehors du domaine, notament les trous et les parties concaves des frontières.

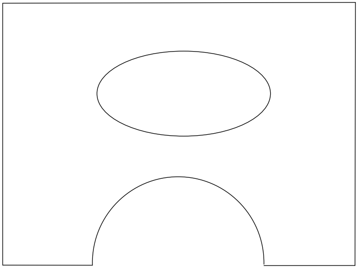


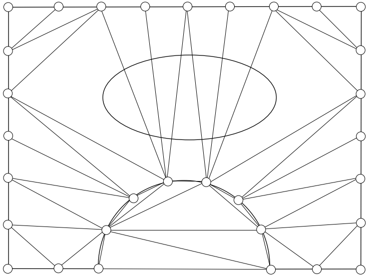


?

Première condition

Le maillage doit recouvrir la partie du domaine délimitée par les frontières, et exclure les parties qui se situent en dehors du domaine, notament les trous et les parties concaves des frontières.





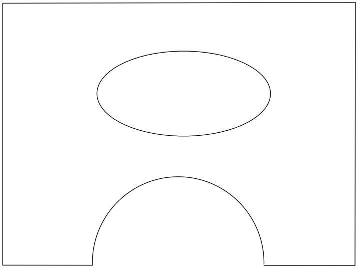
?

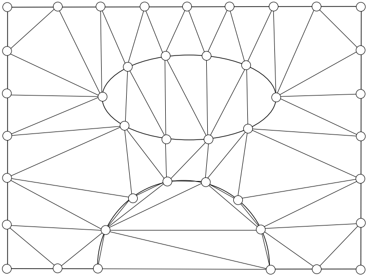
✘ Le maillage n'est pas un recouvrement du domaine ! Il n'y a pas d'adhérence du maillage à la frontière du trou.

✔ C'est un maillage valide, mais non géométriquement conforme.

Première condition

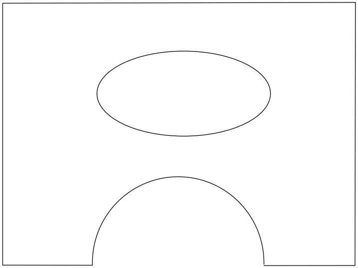
Le maillage doit <u>recouvrir</u> la partie du domaine délimitée par les frontières, et <u>exclure</u> les parties qui se situent en dehors du domaine, notament les trous et les parties concaves des frontières.

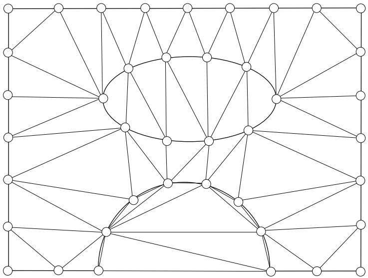




Première condition

Le maillage doit recouvrir la partie du domaine délimitée par les frontières, et exclure les parties qui se situent en dehors du domaine, notament les trous et les parties concaves des frontières.





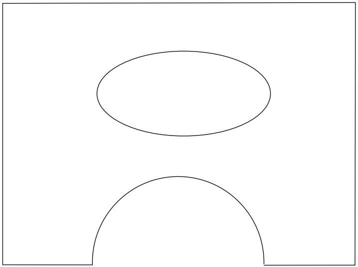
✔ Il y a adhérence du maillage aux frontières du domaine, incluant le trou ;

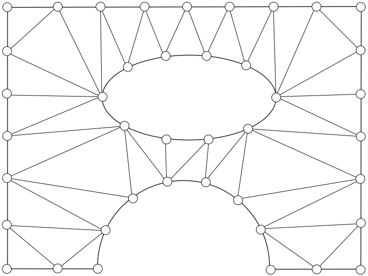
✘ Les parties concaves hors des frontières sont maillées !

✔ C'est un maillage valide, mais non géométriquement conforme.

Maillage géométriquement conforme et valide

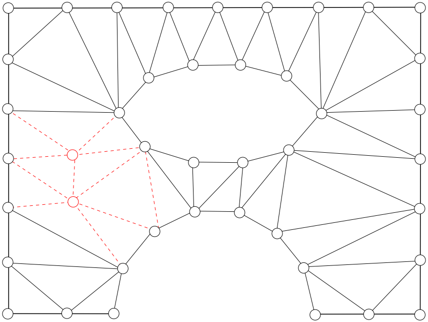
Le maillage <u>recouvre</u> la partie du domaine délimitée par les frontières, et <u>exclue</u> les parties qui se situent en dehors du domaine, notament les trous et les parties concaves des frontières.





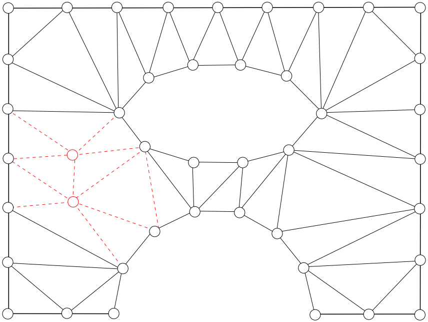
Deuxième condition

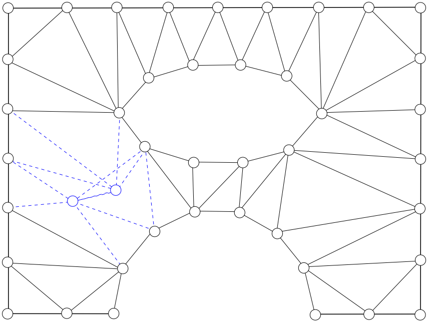
Un premier maillage géométriquement conforme est modifié en déplacant un sommet.



Deuxième condition

Un premier maillage géométriquement conforme est modifié en déplacant un sommet.

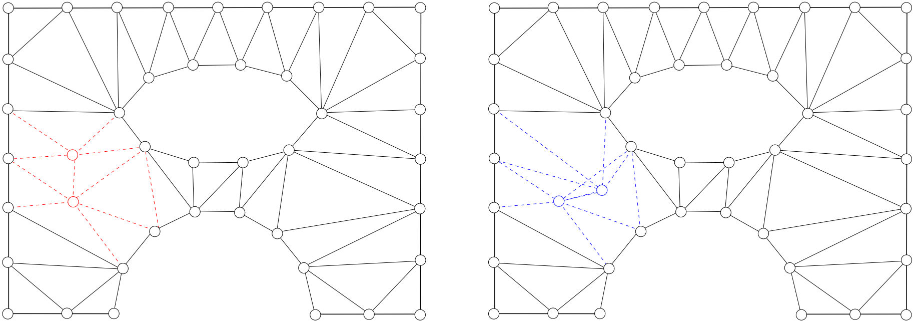




?

Deuxième condition

Un premier maillage géométriquement conforme est modifié en déplacant un sommet.

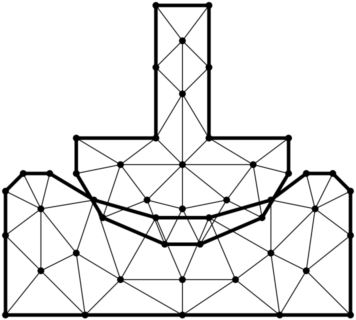


?

✘ Le maillage résultant est géométriquement non conforme car il y a chevauchement des éléments.

Troisième condition

Exemple de deux maillages qui ne sont pas globalement conformes géométriquement, mais où tous les volumes un à un sont conformes géométriquement.



Deux domaines disjoints topologiquement mais qui se chevauchent géométriquement.

Relations d'Euler-Poincaré[1]

Soit $\mathcal{M}$, un maillage en 2D. Les relations d'Euler-Poincaré,

$$S - A + E = g(\Omega),$$

donnent des relations entre ces quantités :

S, *le nombre de sommets,*

A, *le nombre d'arêtes,*

E, *le nombre d'éléments,*

$g(\Omega)$, *est le genre du domaine.*

1. Une bonne référence pour les relations d'Euler-Poincaré : T. Coupez *Grandes transformations et remaillage automatique*, Thèse de Doctorat, École Nationale Supérieure des Mines de Paris, Novembre 91.

Relations d'Euler-Poincaré [1]

Soit $\mathcal{M}$, un maillage en 2D. Les relations d'Euler-Poincaré,

$$S - A + E = g(\Omega),$$

donnent des relations entre ces quantités :

S, *le nombre de sommets,*

A, *le nombre d'arêtes,*

E, *le nombre d'éléments,*

$g(\Omega)$, *est le genre du domaine.*

En 2D, le genre d'un domaine est égal à un moins le nombre de trous.

---

1. Une bonne référence pour les relations d'Euler-Poincaré : T. Coupez *Grandes transformations et remaillage automatique*, Thèse de Doctorat, École Nationale Supérieure des Mines de Paris, Novembre 91.

Relations d'Euler-Poincaré[1]

Soit $\mathcal{M}$, un maillage en 2D. Les relations d'Euler-Poincaré,

$$S - A + E = g(\Omega),$$

donnent des relations entre ces quantités :

- S, *le nombre de sommets,*
- A, *le nombre d'arêtes,*
- E, *le nombre d'éléments,*
- $g(\Omega)$, *est le genre du domaine.*

En 2D, le genre d'un domaine est égal à un moins le nombre de trous.

Cette relation,

➜ *permet de vérifier la validité d'un maillage.*

➜ *est aussi vraie pour des maillages avec des quadrilatères.*

---

1. Une bonne référence pour les relations d'Euler-Poincaré : T. Coupez *Grandes transformations et remaillage automatique*, Thèse de Doctorat, École Nationale Supérieure des Mines de Paris, Novembre 91.

1. *La relation d'Euler-Poincaré en 2D, pour une triangulation d'un domaine isomorphe à un disque donne,*

$$E = 2(S - 1) - S_f$$

où S_f est le nombre de sommets sur la frontière.

2. *Cela signifie que pour une répartition de sommets donnés (sommets internes et sommets sur la frontière), toutes les triangulations possibles s'appuyant sur ces sommets possèdent le même nombre de triangles.*

1. *La relation d'Euler-Poincaré en 2D, pour une triangulation d'un domaine isomorphe à un disque donne,*

$$E = 2(S - 1) - S_f$$

où S_f est le nombre de sommets sur la frontière.

2. *Cela signifie que pour une répartition de sommets donnés (sommets internes et sommets sur la frontière), toutes les triangulations possibles s'appuyant sur ces sommets possèdent le même nombre de triangles.*

3. *Pour la surface (coquille) d'un maillage 3D isomorphe à une sphère donne,*

$$S - A + E = g(\mathrm{sphere}),$$

où E est le nombre d'éléments du maillage surfacique et où le genre d'une sphère est 2.

➜ *Cette relation est valide pour les éléments surfaciques triangulaires ou quadrilatéraux.*

Comportement asymptotique en 2D

Pour une *triangulation* en 2D, quand le nombre de sommets tend vers l'infini, alors $S_f \ll S$ et $g(\Omega) \ll S$.

Comportement asymptotique en 2D

Pour une *triangulation* en 2D, quand le nombre de sommets tend vers l'infini, alors $S_f \ll S$ et $g(\Omega) \ll S$.
A partir, de la relation précédente,

$$E = 2(S - 1) - S_f,$$

on déduit que E tend vers $2S$. Et de,

$$S - A + E = g(\Omega),$$

on déduit que A tend vers $3S$.

Comportement asymptotique en 2D

Pour une *triangulation* en 2D, quand le nombre de sommets tend vers l'infini, alors $S_f \ll S$ et $g(\Omega) \ll S$.
A partir, de la relation précédente,

$$E = 2(S - 1) - S_f,$$

on déduit que E tend vers $2S$. Et de,

$$S - A + E = g(\Omega),$$

on déduit que A tend vers $3S$.

Donc, pour un maillage suffisamment fin,
➜ il y a environ deux fois plus de triangles que de sommets
➜ et environ trois fois plus d'arêtes que de sommets.

Relations d'Euler-Poincaré en 3D

Soit M, un maillage en 3D. Alors,

$$S - A + F - E = g(\Omega),$$

où S, *le nombre de sommets,*
A, *le nombre d'arêtes,*
F, *le nombre de faces,*
E, *le nombre d'éléments,*
$g(\Omega)$, *est le genre du domaine.*
Le genre d'un domaine isomorphe à une sphère est 1, 0 pour un tore, 2 pour une sphère ayant un trou, etc.

Relations d'Euler-Poincaré en 3D

Soit M, un maillage en 3D. Alors,

$$S - A + F - E = g(\Omega),$$

où S, *le nombre de sommets,*
A, *le nombre d'arêtes,*
F, *le nombre de faces,*
E, *le nombre d'éléments,*
$g(\Omega)$, *est le genre du domaine.*
Le genre d'un domaine isomorphe à une sphère est 1, 0 pour un tore, 2 pour une sphère ayant un trou, etc.

➜ Cette relation est aussi vraie pour des maillages avec des quadrilatères.

➜ **En 3D, si le maillage est une *triangulation* (ou tétraédrisation ?) d'un domaine isomorphe à une sphère, alors**

$$A - E = S + S_f - 3,$$

où S_f est le nombre de sommets sur la frontière.

Cela signifie que pour une répartition de sommets donnés (sommets internes et sommets sur la frontière), toutes les triangulations volumiques possibles du domaine s'appuyant sur ces sommets possèdent la même différence d'arêtes et d'éléments.

➜ **On n'a plus la constance du nombre d'éléments et d'arêtes comme en 2D. Par exemple, deux tétraèdres adjacents à une face peuvent se transformer en trois tétraèdres à condition d'ajouter une arête de plus.**

Comportement asymptotique en 3D

➜ **Quand le nombre de sommets, d'arêtes, de faces et d'éléments tendent vers l'infini, le genre de domaine est négligeable et la relation d'Euler-Poincaré s'écrit,**

$$S - A + F - E = 0.$$

Cette relation est vérifiée pour $A = (n+1)S$**,** $F = 2nS$ **et** $E = nS$**, pour tout** n **positif.**

➜ **Il semble qu'une majoration raisonnable soit** $n = 6$ **et donc dans un maillage tétraédrique très fin, il y a environ 7 fois plus d'arêtes que de sommets, 12 fois plus de faces que de sommets et 6 fois plus d'éléments que de sommets.**

➜ **Pour un maillage tétraédrique très "régulier", la majoration serait autour de** ≈ 5.6**.**

Relation d'Euler-Poincaré en ND

La relation d'Euler-Poincaré en ND se généralise comme suit :

les dimensions paires moins les dimensions impaires
est égale au genre du domaine maillé.

$$S - A + F - E + HE - HHE + \ldots = g(\Omega),$$

où HE est le nombre d'hyperéléments en 4D, HHE est le nombre d'hyperhyperéléments en 5D, etc.

Les connectivités

Soit un maillage triangulaire en 2D : S**, les sommets,** A**, les arêtes,** E**, les éléments triangulaires,** Ref **une référence et** $Coord$**, les coordonnées des sommets.**

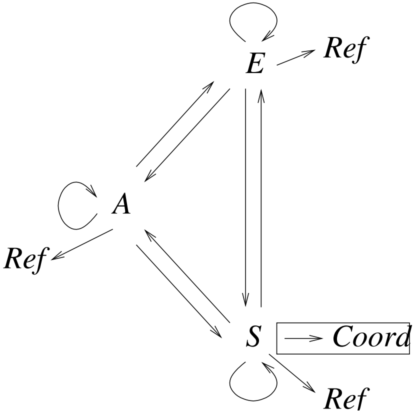
Les connectivités

Soit un maillage triangulaire en 2D : S, les sommets, A, les arêtes, E, les éléments triangulaires, Ref une référence et $Coord$, les coordonnées des sommets.

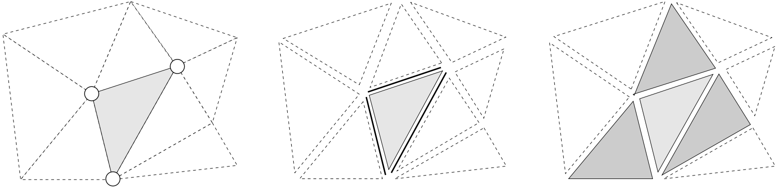
Une connectivité (connexion entre les objets du maillage) est n'importe quel lien dans cette figure (sauf celle vers les coordonnées qui correspond à la composante géométrique d'un maillage).

La table de connectivité, indique le lien :

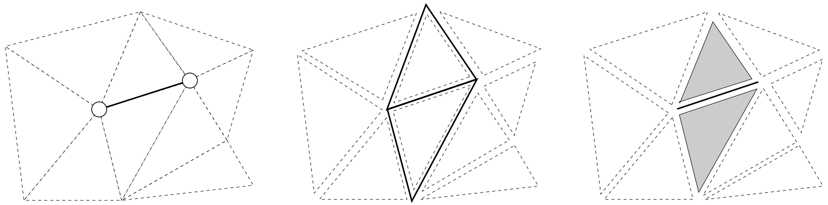
éléments E vers les sommets S.



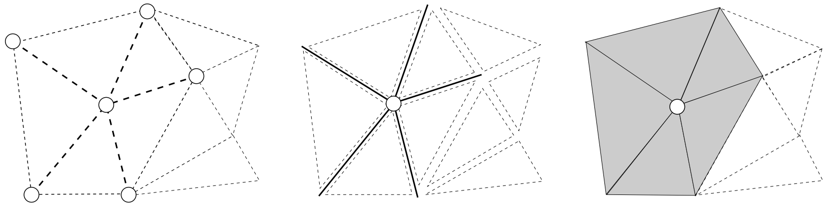
E ➜ S, A **et** E



A ➜ *S*, *A* **et** *E*



S ➜ S, A et E



Toutes les connectivités 2D

$\boxed{E \text{ vers } S :}$ Pour chaque élément, la liste de ses sommets (appelé **La** table de connectivité)

$\boxed{E \text{ vers } A :}$ Pour chaque élément, la liste de ses arêtes.

$\boxed{E \text{ vers } E :}$ Pour chaque élément, la liste des éléments voisins par les faces.

$\boxed{A \text{ vers } S :}$ Pour chaque arête, la liste de ses sommets.

$\boxed{A \text{ vers } E :}$ Pour chaque arête, la liste des éléments auxquels cette arête appartient.

$\boxed{A \text{ vers } A :}$ Pour chaque arête, une liste non déterminée d'arêtes !

$\boxed{S \text{ vers } E :}$ Pour chaque sommet, la liste des éléments auxquels ce sommet appartient.

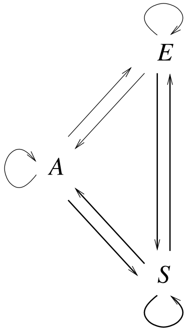
$\boxed{S \text{ vers } A :}$ Pour chaque sommet, la liste des arêtes auxquelles ce sommet appartient.

$\boxed{S \text{ vers } S :}$ Pour chaque sommet, la liste des sommets voisins par les arêtes.

$\boxed{S, A \text{ et } E \text{ vers } Ref :}$ une référence vers une condition limite, vers le modèle géométrique, etc.

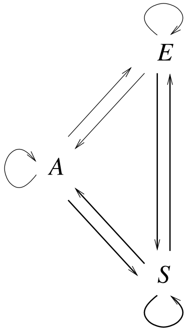
Connectivité minimale

- Soit seulement les connectivités entre les sommets, les arêtes et les éléments, i.e., les références sont exclues.
- Soit $\mathcal{C}_{min}$, une connectivité contenant les sommets, soit $S \rightarrow E$, $E \rightarrow S$, $S \rightarrow A$, $A \rightarrow S$ et $S \rightarrow S$.



Connectivité minimale

- Soit seulement les connectivités entre les sommets, les arêtes et les éléments, i.e., les références sont exclues.
- Soit $\mathcal{C}_{min}$, une connectivité contenant les sommets, soit $S \rightarrow E$, $E \rightarrow S$, $S \rightarrow A$, $A \rightarrow S$ et $S \rightarrow S$.

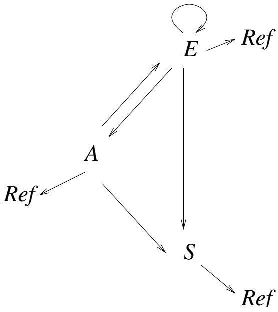


- **La connaissance d'une seule connectivité $\mathcal{C}_{min}$ est suffisante pour déduire toutes les autres.**
- **En général, $\mathcal{C}_{min}$ est $E \rightarrow S$ <u>LA</u> table de connectivité.**

Connectivités directes

Une connectivité directe est une connectivité dont les dimensions sont fixes.
Les connectivités directes sont :

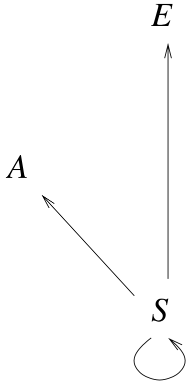
$E \rightarrow S$	de dimension	$(3, E)$,
$E \rightarrow E$	de dimension	$(3, E)$,
$A \rightarrow S$	de dimension	$(2, A)$,
$E \rightarrow A$	de dimension	$(3, E)$,
$A \rightarrow E$	de dimension	$(2, A)$,
$S \rightarrow Ref$	de dimension	$(S, 1)$,
$A \rightarrow Ref$	de dimension	$(A, 1)$,
$E \rightarrow Ref$	de dimension	$(E, 1)$.



Connectivités inverses

Une connectivité inverse est une connectivité dont les dimensions sont variables.

1. Les connectivités inverses sont $S \to S$, $S \to A$, $S \to E$ car il y a un nombre variable de sommets, d'arêtes et d'éléments autour d'un sommet.
2. La dimension des connectivités inverses est la même que la dimension des connectivités directes correspondantes.

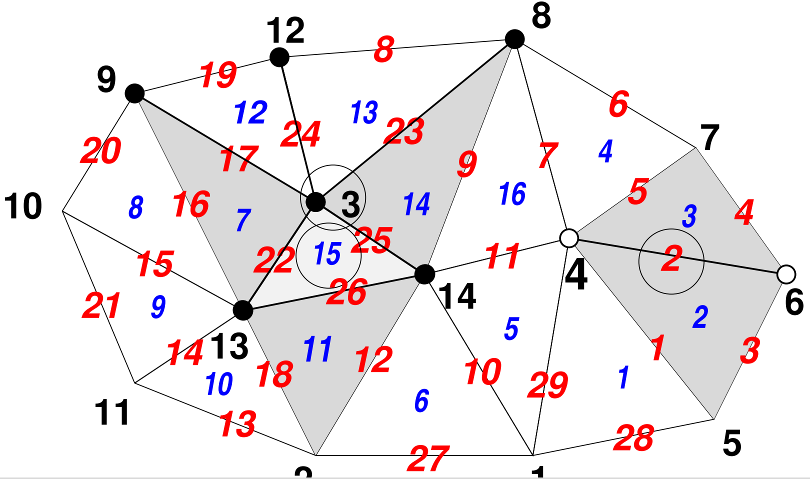


Mode de représentation

Selon le choix de la représentation, le type et la dimension, les entités d'un maillage sont constituées de sommets, d'arêtes et des éléments ou cellules.

Mode de représentation

Selon le choix de la représentation, le type et la dimension, les entités d'un maillage sont constituées de sommets, d'arêtes et des éléments ou cellules.

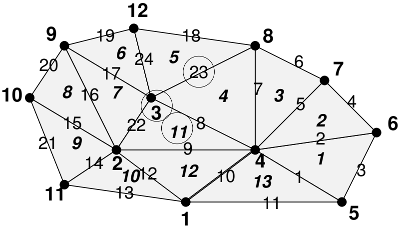


Tout comme pour un modèle géométrique, un maillage comprend une composante topologique et une composante géométrique :

Géométrie : description des éléments, c'est-à-dire leur position dans l'espace, leur forme (un point, un segment ou une face.)

$$(x_1, y_1, z_1)^T$$
$$(x_2, y_2, z_2)^T$$
$$(x_3, y_3, z_3)^T$$
$$(x_4, y_4, z_4)^T$$
$$(x_5, y_5, z_5)^T$$
$$\dots$$

Topologie : les connexions entre les divers éléments du maillage.



Tout comme pour un modèle géométrique, un maillage comprend une composante topologique et une composante géométrique :

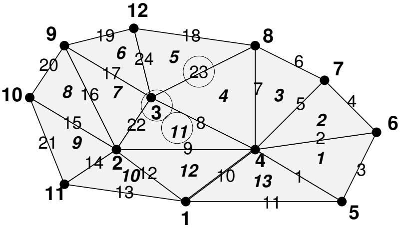
Géométrie : description des éléments, c'est-à-dire leur position dans l'espace, leur forme (un point, un segment ou une face.)

➜ Ces informations sont des nombres réels, représentant les coordonnées.

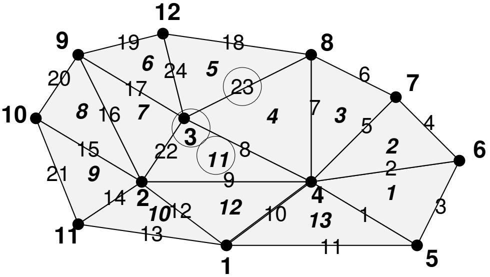
$$(x_1, y_1, z_1)^T$$
$$(x_2, y_2, z_2)^T$$
$$(x_3, y_3, z_3)^T$$
$$(x_4, y_4, z_4)^T$$
$$(x_5, y_5, z_5)^T$$
$$\ldots$$

Topologie : les connexions entre les divers éléments du maillage.

➜ Ces informations sont des entiers ou des pointeurs.

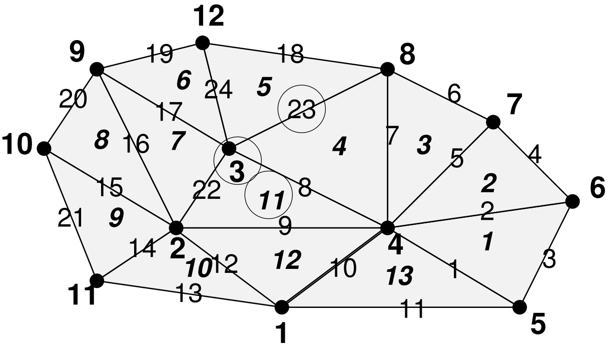


Topologie d'un maillage : Exemple



Arête **23**	➜	Faces : **5** et **4**
	➜	Sommets : **3** vers **8**
Sommet **3**	➜	Arêtes : **22**, **8**, **23**, **24** et **17**
	➜	Sommets : **2**, **4**, **8**, **12**, et **9**
	➜	Éléments : **11**,**4**, **5**, **6**et **7**
Face **11**	➜	Sommets : **2**, **4** et **3**
	➜	Arêtes : **22**, **9** et **8**
	➜	Faces : **7**, **12** et **4**

Exemple : connectivité directe



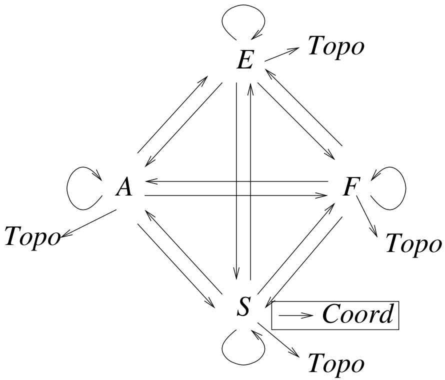
E	$E \to S$
1	4,5,6
2	4,6,7
3	4,7,8
4	4,8,3
5	3,8,12
6	3,12,9
7	3,9,2
8	2,9,10
9	2,10,11
10	2,11,1
11	2,4,3
12	2,1,4
13	4,1,5

Nombre moyen de voisins en 2D

La dimension de la connectivité $E \rightarrow S$ est de $(3, E)$. Pour une triangulation suffisamment fine, comme il y a environ 2 fois plus d'éléments que de sommets, la dimension de la connectivité $E \rightarrow S$ est d'environ $6S$. Puisque la dimension de la connectivité $S \rightarrow E$ est la même que la connectivité $E \rightarrow S$, soit $6S$, il y a donc en moyenne 6 éléments autour d'un sommet. De même, il y a en moyenne 6 arêtes et 6 sommets autour d'un sommet.

	Sommet	Arête	Élément
Sommet	6	6	6
Arête			
Élément			

Toutes les connectivités 3D



Soient S, les sommets, A, les arêtes, F, les faces, E, les éléments triangulaires, Ref, une référence et $Coord$, les coordonnées des sommets.

Nombre moyen de voisins en 3D

La dimension de la connectivité $E \rightarrow S$ est de $4E$. Pour une triangulation suffisamment fine, comme il y a environ 5.6 fois plus d'éléments que de sommets, la dimension de la connectivité $E \rightarrow S$ est d'environ $22.4S$.
Puisque la dimension de la connectivité $S \rightarrow E$ est la même que la connectivité $E \rightarrow S$, soit $22.4S$, il y a donc en moyenne 22.4 éléments autour d'un sommet.
De même, il y a en moyenne 13.2 arêtes, 13.2 sommets et 33.6 faces autour d'un sommet.

	Sommet	Arête	Face	Élément
Sommet	13.2	13.2	33.6	22.4
Arête				
Face				
Élément				

Choix de la structure de données

Il y a deux questions :

1. Quelles connectivités faut-il stocker en mémoire ?
2. Quelles structures de données (vecteurs, liste chaînées, arbre binaires, etc) doit-on utiliser pour stocker ces connectivités ?

Choix de la structure de données

Il y a deux questions :

1. Quelles connectivités faut-il stocker en mémoire ?
2. Quelles structures de données (vecteurs, liste chaînées, arbre binaires, etc) doit-on utiliser pour stocker ces connectivités ?

Le but du choix d'une structure de données est de trouver le compromis optimal entre,

- l'espace mémoire,
- la facilité de programmation,
- la facilité de maintenir à jour la structure de données quand on fait une modification locale au maillage.

Choix de la structure de données

Il y a deux questions :

1. Quelles connectivités faut-il stocker en mémoire ?
2. Quelles structures de données (vecteurs, liste chaînées, arbre binaires, etc) doit-on utiliser pour stocker ces connectivités ?

Le but du choix d'une structure de données est de trouver le compromis optimal entre,

- l'espace mémoire,
- la facilité de programmation,
- la facilité de maintenir à jour la structure de données quand on fait une modification locale au maillage.

et

- **le temps de calcul nécessaire pour retrouver les connectivités qui n'ont pas été stockées.**

Tout stocker tout ou à peu près tout, prendra beaucoup d'espace mémoire, mais en contrepartie, on pourrait croire que le code s'exécuterait plus rapidement car n'importe quelle information serait directement disponible.

- *Et bien non, dans un remailleur qui modifie souvent les connectivités, le temps qu'on gagne à avoir directement accès à des informations stockées est perdu par le temps qu'on perd à mettre à jour trop souvent des connectivités qui ont des "demi-vies" trop brèves.*
- *Dépendant de l'architecture du processeur sur lequel s'exécute le logiciel (mémoire cache, espace disque..), plus d'espace mémoire ne signifie pas moins de temps d'exécution si le remailleur se met à swapper sur le disque dur.*
- *Si on stocke rien ou à peu près rien* `ICEM-CFD` *ne stocke que V vers S et S vers V), prendra peu d'espace mémoire, sera facile à programmer et à maintenir à jour, mais on perdra beaucoup de temps dans des méthodes pour retrouver sans cesse les connectivités non stockées.*

Si on ne stocke pas toutes les connectivités, il faut néanmoins stocker quelques connectivités qui permettrons de retrouver les connectivités non stockées avec des méthodes rapides.

- *Les connectivités faciles à maintenir à jour suite à des changements du maillage sont les connectivités les plus locales possibles et qui font donc intervenir le moins le voisinage, ainsi que les connectivités de dimensions constantes.*
- *Si on écrit un résoluteur, les connectivités sont statiques et peuvent être stockées dans des vecteurs.*
- *Si on écrit un mailleur, les connectivités sont dynamiques, il faut pouvoir ajouter des sommets, des arêtes, des éléments, etc. Il est préférable d'utiliser des structures de données dynamiques telles des listes chaînées, etc.*
- *Il ne faut pas hésiter à changer de structures de données.*