

CONCENTRATION DE MAILLES

Ricardo Camarero
Département de génie mécanique
24 février 2024



Motivation et contexte
Concepts de base et historique
Modélisation géométrique

Maillages structurés/curvilignes :

- Méthodes algébriques : maillages conformes, transfinis ;
- Méthodes EDP : Elliptiques (Winslow), hyperboliques.
- **Concentration de mailles**

Maillages non-structurés :

- Triangulation de Delaunay
- Maillages Delaunay contraints
- Méthode d'avance de front

Maillages hybrides :

- décomposition spatiale : multiblocs, hiérarchique.

Table des matières

- 1 Généralités
- 2 Un nouveau modèle : Équations de Poisson
- 3 Construction des termes forcés
- 4 Exemples
- 5 Exemples

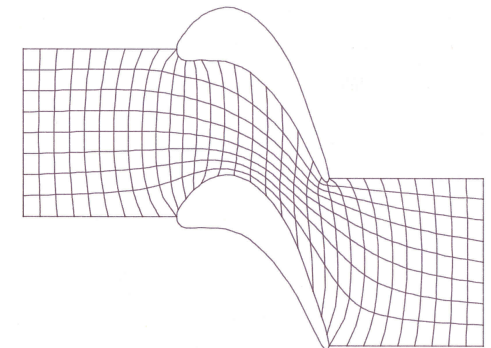
Généralités

Comportement des équations de mailles

L'espace et la forme des différentes familles de courbes d'un maillage dépendent sur,

- la forme des frontières ;
- les propriétés de lissage des équations de maille, soit l'opérateur \mathcal{L} ,

$$\alpha \frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial \eta^2} - 2\beta \frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial \eta \partial \tau} + \gamma \frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial \tau^2} = 0$$



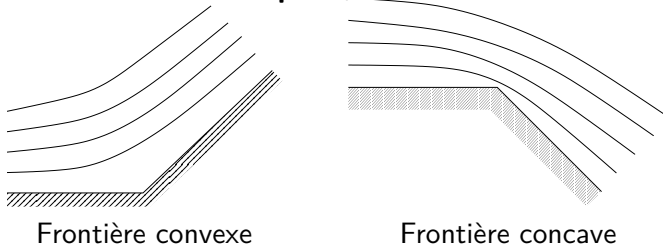
Le comportement de ces équations est relié aux coefficients α , γ et β qui dépendent de la solution x et y d'où la nonlinéarité et un fort couplage.

Frontières concave et convexe

Sur une frontière et son voisinage,

- la distribution des lignes de maillage alignées avec cette frontière se comporte selon la courbure;
- les équations de maille ont, en général, tendance à distribuer les noeuds du maillage uniformément et faire un recouvrement régulier à l'intérieur du domaine;

Cependant, avec de fortes variations dans la courbure, l'espacement augmente ou diminue vers la paroi, selon la courbure locale :



Frontière convexe

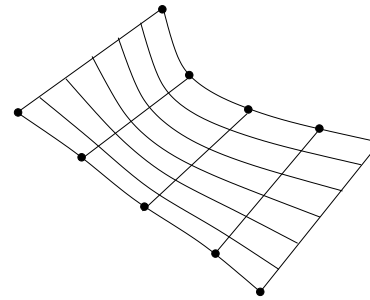
Frontière concave

Ce n'est pas le comportement souhaité dans ces situations.

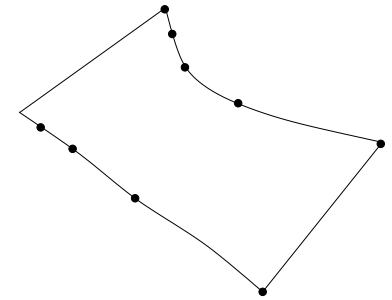
Concentration sur les frontières

Illustration de l'effet sur les lignes de maillage lors d'une distribution non-uniforme des noeuds sur les bords.

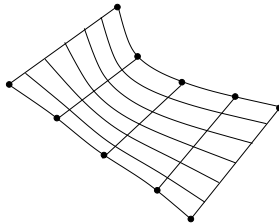
Discrétisation uniforme



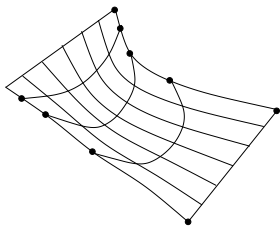
Avec concentration



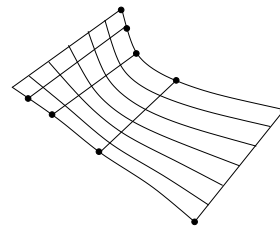
Quel est le résultat qui sera obtenu ?



Une distribution non-uniforme des noeuds sur les bords donne :



Les lignes de maille sont tirées dans la direction de la concentration, en s'atténuant vers l'intérieur du domaine



Un terme, proportionnel à la concentration appliquée sur le bord, force solidairement les mailles, et sans déformation.

Motivation

Les équations de maille dérivées des équations de Laplace possèdent de très bonnes caractéristiques : unicité, conformité des frontières, régularité (lissage), etc...

Avec les limitations suivantes :

- comportement inverse à celui souhaité dans le voisinage de coins convexes ou concaves;
- une distribution non-uniforme des noeuds sur une frontière, donne des lignes de maillages qui ne suivent pas les positions des noeuds sur la frontière.

On recherche un mécanisme pour contrôler la distribution des lignes de maillage dans ces situations.

Comment généraliser le modèle de l'analogie thermique à ces situations ?

1 Généralités

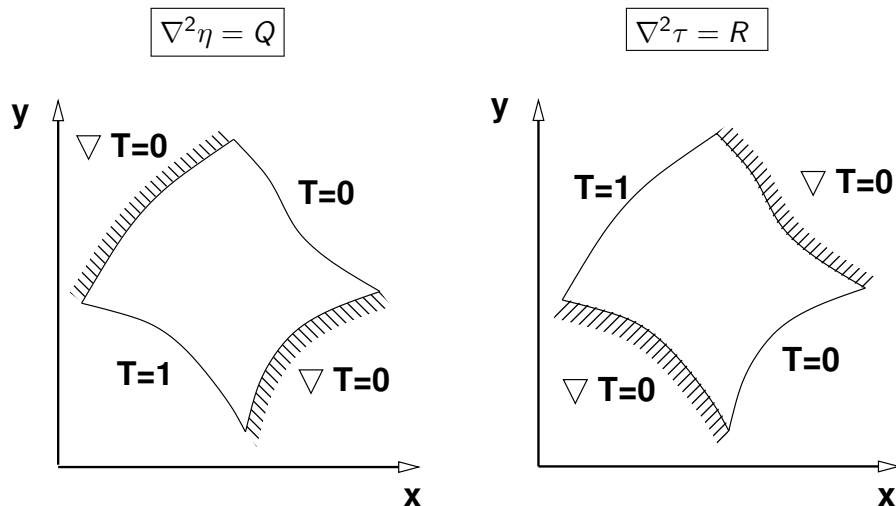
2 Un nouveau modèle : Équations de Poisson

3 Construction des termes forcés

4 Exemples

5 Exemples

On reformule le problème thermique en un modèle de Poisson.



Les isothermes (lignes de maillage) sont déviés par la présence de ces termes qui deviennent le mécanisme de contrôle recherché.

Équations de Poisson

Pour un contrôle explicite, on modifie les équations de maille en ajoutant un terme source :

- en dimension deux, on obtient un système de Poisson pour les lignes de mailles, modèle de maille τ et η :

$$\begin{aligned}\nabla^2 \eta &= Q \\ \nabla^2 \tau &= R\end{aligned}$$

- Les termes, Q et R , dans le cadre de l'analogie thermique, s'interprètent comme des sources (puits) de chaleur.
- Le modèle de maille devient une équation de Poisson qui ne possède pas les mêmes caractéristiques que le modèle de Laplace.

Équations de maille généralisées

On transforme l'équation de Poisson en équation de maille en inversant les variables dépendantes (η, τ) et les variables indépendantes (x, y).

$$\begin{aligned}\tau &= \tau(x, y) & x &= x(\eta, \tau) \\ \eta &= \eta(x, y) & y &= y(\eta, \tau)\end{aligned}$$

$$\nabla^2 \eta = Q$$

$$\nabla^2 \tau = R$$

\Rightarrow

$$\alpha x_{\eta\eta} + \gamma x_{\tau\tau} - 2\beta x_{\eta\tau} = -J^2 (Qx_{\eta} + Rx_{\tau})$$

$$\alpha y_{\eta\eta} + \gamma y_{\tau\tau} - 2\beta y_{\eta\tau} = -J^2 (Qy_{\eta} + Ry_{\tau})$$

où

$$\begin{aligned}\alpha &= x_{\tau}^2 + y_{\tau}^2 \\ \gamma &= x_{\eta}^2 + y_{\eta}^2 \\ \beta &= x_{\eta}x_{\tau} + y_{\eta}y_{\tau} \\ J &= x_{\eta}y_{\tau} - x_{\tau}y_{\eta}\end{aligned}$$

Frontières du domaine

Sur les frontières $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ et Γ_4 qui coïncident avec $\eta = \eta_1$ pour Γ_1 , $\eta = \eta_2$ pour Γ_2 , $\tau = \tau_1$ pour Γ_3 et $\tau = \tau_2$ pour Γ_4 , on a :

Frontière Γ_1 :

$$\begin{aligned} y &= f_2(\eta_1, \tau) \\ x &= f_1(\eta_1, \tau) \end{aligned}$$

Frontière Γ_3

$$\begin{aligned} y &= h_2(\eta, \tau_1) \\ x &= h_1(\eta, \tau_1) \end{aligned}$$

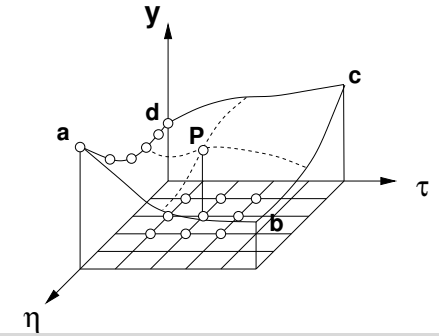
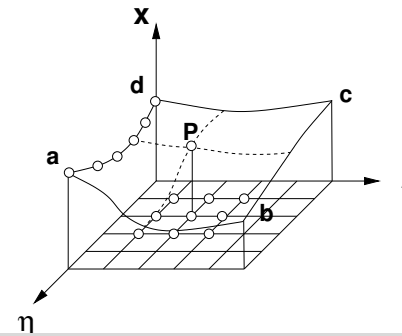
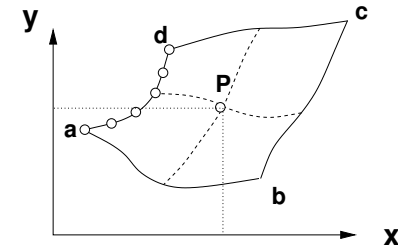
Frontière Γ_2

$$\begin{aligned} y &= g_2(\eta_2, \tau) \\ x &= g_1(\eta_2, \tau) \end{aligned}$$

Frontière Γ_4

$$\begin{aligned} y &= q_2(\eta, \tau_2) \\ x &= q_1(\eta, \tau_2) \end{aligned}$$

Conditions frontières



Termes forcés

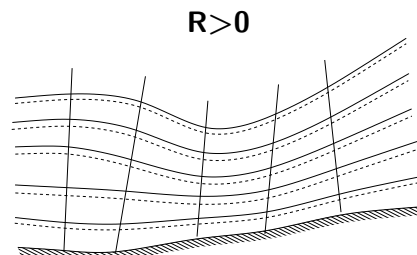
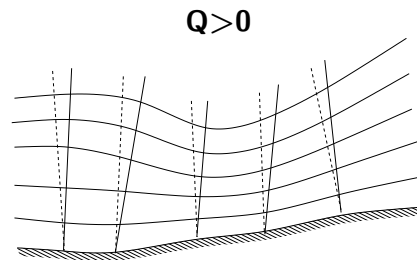
Il est difficile de prévoir a priori l'effet des termes forcés sur le maillage.

- On peut de façon qualitative analyser le comportement des termes Q et R en revenant au modèle thermique :

$$\begin{aligned} \nabla^2 \eta &= Q \\ \nabla^2 \tau &= R \end{aligned}$$

- Effet des termes Q et R sur le maillage près d'une paroi :

- $Q > 0$, pousse les lignes de maillage dans le sens de η
- $R < 0$, concentre les lignes de maillage dans le sens de τ

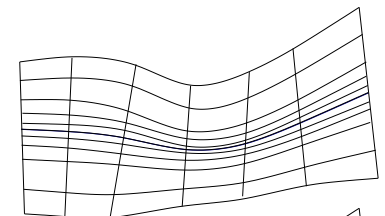


Exemples de choix des Q et R

$$\begin{aligned} \alpha \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} - 2\beta \frac{\partial^2 x}{\partial \eta \partial \tau} + \gamma \frac{\partial^2 x}{\partial \tau^2} &= -J^2 (Q_{x\eta} + R_{x\tau}) \\ \alpha \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} - 2\beta \frac{\partial^2 y}{\partial \eta \partial \tau} + \gamma \frac{\partial^2 y}{\partial \tau^2} &= -J^2 (Q_{y\eta} + R_{y\tau}) \end{aligned}$$

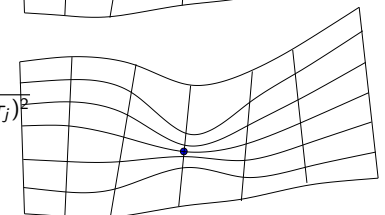
Vers une ligne $\tau = \tau_i$

$$\begin{aligned} Q &= -A \times \text{sign}(\tau - \tau_i) e^{-b|\tau - \tau_i|} \\ R &= 0 \end{aligned}$$



Vers un point $(\tau = \tau_i, \eta = \eta_j)$

$$\begin{aligned} Q &= -A \times \text{sign}(\tau - \tau_i) e^{-b\sqrt{(\eta - \eta_i)^2 + (\tau - \tau_i)^2}} \\ R &= 0 \end{aligned}$$



1 Généralités

2 Un nouveau modèle : Équations de Poisson

3 Construction des termes forcés

4 Exemples

5 Exemples

Formulation des opérations

- 1 **Concentration** : transformation analytique ou algébrique de l'espace paramétrique.

$$(\eta, \tau) \implies (\psi, \rho)$$

$$\psi = \psi(\eta, \tau)$$

$$\rho = \rho(\eta, \tau)$$

- 2 **Déformation** : transformation ou application de l'espace concentré vers l'espace physique par les équations de maille.

$$(\psi, \rho) \implies (x, y)$$

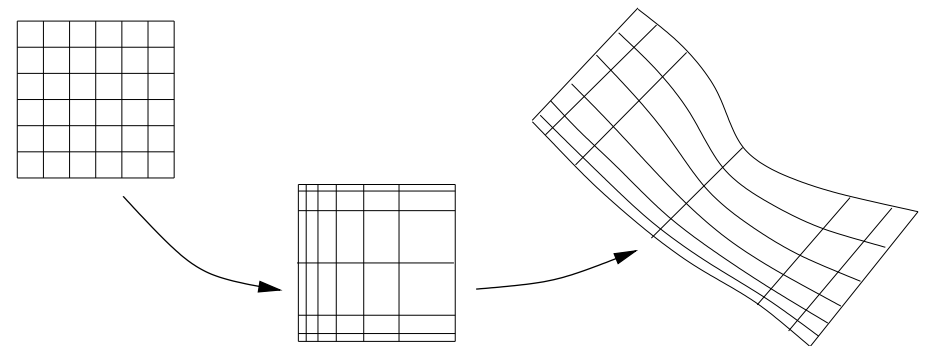
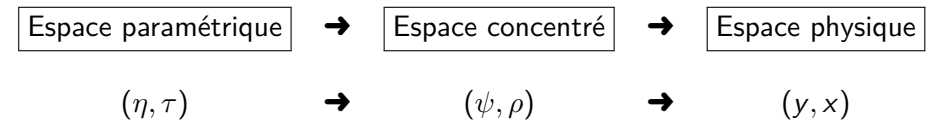
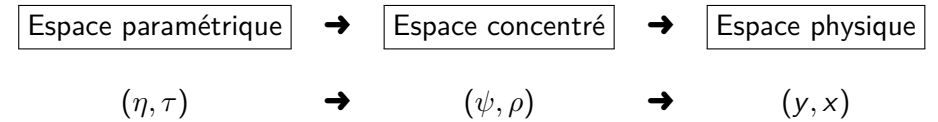
$$L(x) = 0$$

$$L(y) = 0$$

Construction des termes forcés

Le choix des fonctions Q et R dépend de l'effet recherché.

- 1 *A cause du fort couplage des équations, il est difficile d'isoler l'effet d'un terme forcé sur chacune des familles de courbes de maille.*
- 2 *On propose une méthode en deux étapes,*
 - une concentration effectuée dans l'espace paramétrique,
 - suivi d'une transformation de ce domaine vers l'espace physique.



Equations de maille généralisées

L'enchaînement de ces deux opérations donne une équation de maille généralisée, qui réalise formellement en une seule étape la transformation recherchée :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathcal{L}x \\ \mathcal{L}y \end{bmatrix} &= \mathcal{J}\mathcal{G}^{-1} \begin{bmatrix} \mathcal{L}\psi \\ \mathcal{L}\rho \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{G} \begin{bmatrix} x_\eta & x_\tau \\ y_\eta & y_\tau \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho_\tau & -\psi_\tau \\ -\rho_\eta & \psi_\eta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{L}\psi \\ \mathcal{L}\rho \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{où } \mathcal{L} = \alpha \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - 2\beta \frac{\partial^2}{\partial \eta \partial \tau} + \gamma \frac{\partial^2}{\partial \tau^2}$$

$$\text{et } \mathcal{G} = \frac{\partial(\psi, \rho)}{\partial(\eta, \tau)} = \begin{bmatrix} \psi_\eta & \psi_\tau \\ \rho_\eta & \rho_\tau \end{bmatrix}$$

Interprétation

Dans le cadre de l'analogie thermique qui sert de modèle, le membre de droite issu de l'enchaînement des étapes de concentration-transformation, s'interprète comme un terme source généralisé.

Ce terme source applique une "force" aux lignes du maillage dans la direction en question, résultant dans un déplacement correspondant à la concentration appliquée sur les frontières.

Concentration dans une direction

La première étape, $(\eta, \tau) \rightarrow (\psi, \rho)$ avec la transformation on découple la concentration :

$$\begin{aligned} \psi &= \psi(\eta, \tau) & \rightarrow & & \psi &= \psi(\eta) \\ \rho &= \rho(\eta, \tau) & & & \rho &= \rho(\tau) \end{aligned}$$

où les fonctions ψ, ρ et leurs dérivées représentent les concentrations respectives dans les directions τ et η , c'est-à-dire, une concentration séparée pour chaque direction.

Donc,

$$\begin{aligned} \psi_\tau &= 0 \\ \rho_\eta &= 0 \end{aligned}$$

En substituant dans l'équation de maille généralisée,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathcal{L}x \\ \mathcal{L}y \end{bmatrix} &= \mathcal{J}\mathcal{G}^{-1} \begin{bmatrix} \mathcal{L}\psi \\ \mathcal{L}\rho \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{G} \begin{bmatrix} x_\eta & x_\tau \\ y_\eta & y_\tau \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho_\tau & -\psi_\tau \\ -\rho_\eta & \psi_\eta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{L}\psi \\ \mathcal{L}\rho \end{bmatrix} \end{aligned}$$

on obtient une forme simplifiée des équations de maille, où les opérations sont découplées, par direction :

$$\begin{aligned} \alpha x_{\eta\eta} + \gamma x_{\tau\tau} - 2\beta x_{\eta\tau} &= \alpha \frac{\psi_{\eta\eta}}{\psi_\eta} x_\eta + \gamma \frac{\rho_{\tau\tau}}{\rho_\tau} x_\tau \\ \alpha y_{\eta\eta} + \gamma y_{\tau\tau} - 2\beta y_{\eta\tau} &= \alpha \frac{\psi_{\eta\eta}}{\psi_\eta} y_\eta + \gamma \frac{\rho_{\tau\tau}}{\rho_\tau} y_\tau \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \alpha &= x_\tau^2 + y_\tau^2 \\ \gamma &= x_\eta^2 + y_\eta^2 \\ \beta &= x_\eta x_\tau + y_\eta y_\tau \\ J &= x_\eta y_\tau - x_\tau y_\eta \end{aligned}$$

Synthèse des équations de maille

Equation de Laplace :

$$\alpha x_{\eta\eta} + \gamma x_{\tau\tau} - 2\beta x_{\eta\tau} = 0$$

$$\alpha y_{\eta\eta} + \gamma y_{\tau\tau} - 2\beta y_{\eta\tau} = 0$$

Equation de Poisson généralisée :

$$\alpha x_{\eta\eta} + \gamma x_{\tau\tau} - 2\beta x_{\eta\tau} = -J^2 (Qx_\eta + Rx_\tau)$$

$$\alpha y_{\eta\eta} + \gamma y_{\tau\tau} - 2\beta y_{\eta\tau} = -J^2 (Qy_\eta + Ry_\tau)$$

Equation de Poisson avec concentration découplée par direction :

$$\alpha x_{\eta\eta} + \gamma x_{\tau\tau} - 2\beta x_{\eta\tau} = \alpha \frac{\psi_{\eta\eta}}{\psi_\eta} x_\eta + \gamma \frac{\rho_{\tau\tau}}{\rho_\tau} x_\tau$$

$$\alpha y_{\eta\eta} + \gamma y_{\tau\tau} - 2\beta y_{\eta\tau} = \alpha \frac{\psi_{\eta\eta}}{\psi_\eta} y_\eta + \gamma \frac{\rho_{\tau\tau}}{\rho_\tau} y_\tau$$

1 Généralités

2 Un nouveau modèle : Équations de Poisson

3 Construction des termes forcés

4 Exemples

5 Exemples

Remarques

✓ Ces équations se ressemblent dans la mesure où l'introduction de la concentration, quelle que soit la méthode, se traduit mathématiquement par des termes forcés.

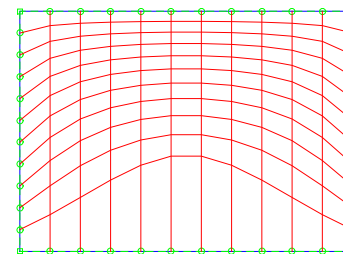
✗ La différence est que les fonctions Q et R dépendent de η et τ , et contrôlent de façon couplée la concentration dans ces deux directions.

✓ En choisissant des fonctions ψ et ρ qui ne dépendent que d'une seule variable, τ et η , respectivement :

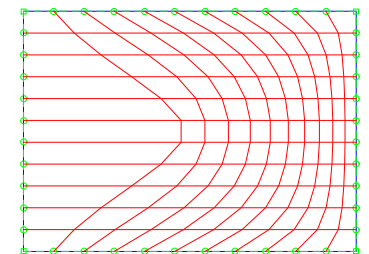
- le contrôle de la concentration a été découplé.
- Le choix devient alors plus intuitif et plus facile à établir en fonction de l'effet souhaité.

Termes forcés constants pour un rectangle

$Q=0, R=20$

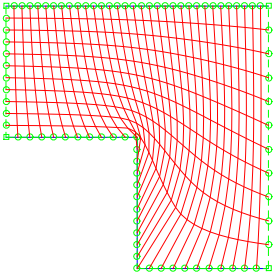


$Q=20, R=0$

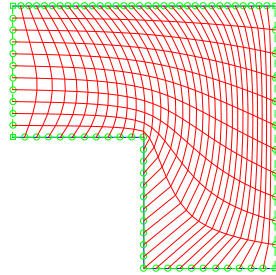


Termes forcés constants pour la marche

Q=0, R=0

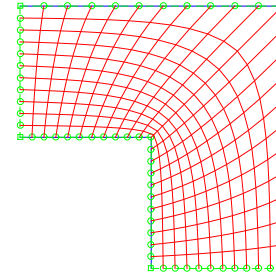


Q=30, R=0

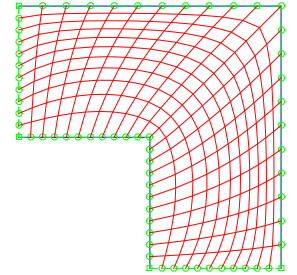


Termes forcés constants pour le coude

Q=0, R=0

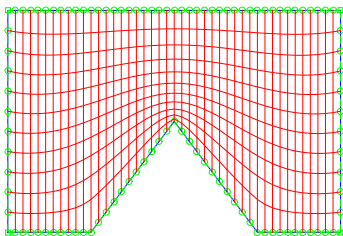


Q=30, R=0

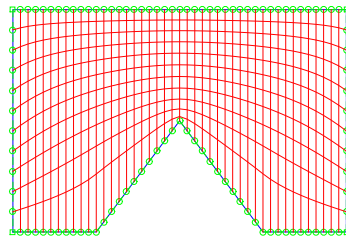


Termes forcés constants pour le canal losange

Q=0, R=5



Q=30, R=-5



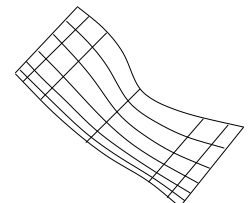
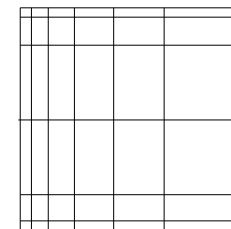
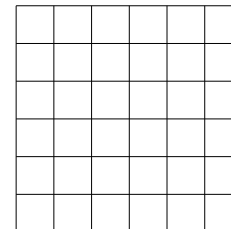
Espace paramétrique



Espace concentré



Espace physique

 (η, τ)  (ψ, ρ)  (y, x) 

$$\eta_1 \leq \eta \leq \eta_m$$

$$\eta$$



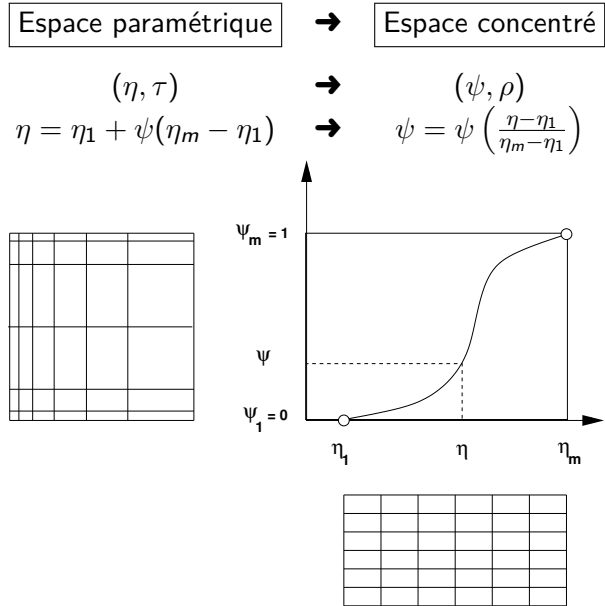
$$0 \leq \psi \leq 1$$

$$\psi = \psi \left(\frac{\eta - \eta_1}{\eta_m - \eta_1} \right)$$



$$x_{min} \leq x \leq x_{max}$$

$$x = F(\psi)$$



Calcul des termes forcés :

$$\psi = \psi\left(\frac{\eta - \eta_1}{\eta_m - \eta_1}\right)$$

$$\psi_{\eta} = \psi' \left(\frac{\eta - \eta_1}{\eta_m - \eta_1}\right) \frac{1}{\eta_m - \eta_1}$$

$$\psi_{\eta\eta} = \psi'' \left(\frac{\eta - \eta_1}{\eta_m - \eta_1}\right) \left(\frac{1}{\eta_m - \eta_1}\right)^2$$

Pour une distribution quelconque ψ ,

$$\psi\left(\frac{\eta - \eta_1}{\eta_m - \eta_1}\right)$$

on évalue ψ' et ψ'' . Ce qui donne pour le terme forcé,

$$\frac{\psi''}{\psi'}$$

1 Généralités

2 Un nouveau modèle : Équations de Poisson

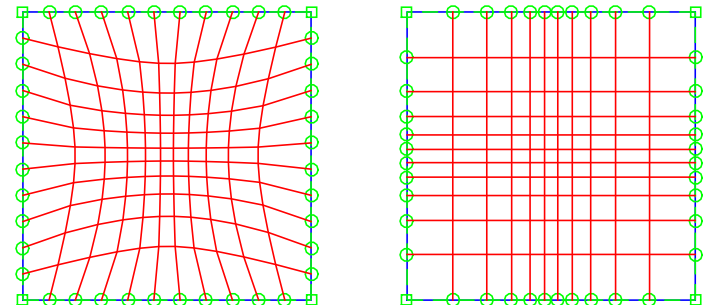
3 Construction des termes forcés

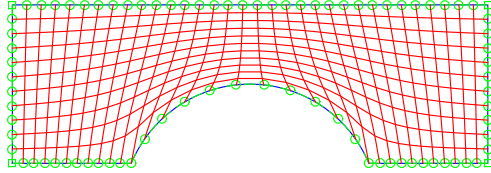
4 Exemples

5 Exemples

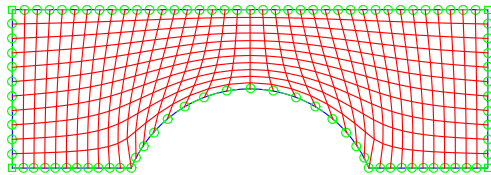
Concentration du maillage vers un point

Comparaison de deux techniques :





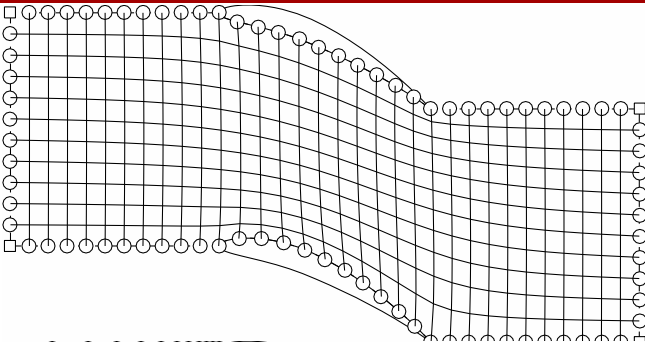
Maillage Winslow avec une répartition uniforme de 10 points, sans concentration



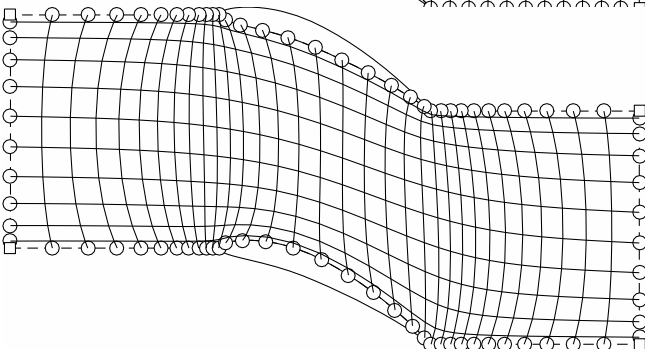
Modification du nombre de points de 10 à 15 sur la bosse, avec une concentration vers les extrémités avec un facteur de .5

Formes particulières

ψ	$\psi_{\eta\eta}/\psi_{\eta}$
Sinusoidale $\sin\left(\frac{\eta-\eta_1}{\eta_m-\eta_1}\frac{\pi}{2}\right)$	$-\frac{\pi/2}{\eta_m-\eta_1}\tan\left(\frac{\eta-\eta_1}{\eta_m-\eta_1}\frac{\pi}{2}\right)$
$\frac{1}{2}\left(1 + \sin\pi\left(\frac{\eta-\eta_1}{\eta_m-\eta_1} - \frac{1}{2}\right)\right)$	$-\frac{\pi}{\eta_m-\eta_1}\tan\pi\left(\frac{\eta-\eta_1}{\eta_m-\eta_1} - \frac{1}{2}\right)$
Polynomiale $\left(\frac{\eta-\eta_1}{\eta_m-\eta_1}\right)^n$	$(n-1)\left(\frac{\eta_m-\eta_1}{\eta-\eta_1}\right)/(\eta_m-\eta_1)$
$\eta\left[(1-\omega)\frac{(\eta^2-3L\eta+3L^2)}{(1-3L+3L^2)} + \omega\right]$	$\frac{6(1-\omega)(\eta-L)}{3(1-\omega)(\eta^2-2L\eta+L^2)+\omega(1-3L+3L^2)}$



Maillage Winslow avec répartition uniforme et sans concentration



Maillage Winslow avec concentrations vers toutes les parois intrados et extrados, ainsi que vers les bords d'attaque et de fuite