Département de Mathématiques et de Génie Industriel
École Polytechnique de Montréal

MATHÉMATIQUES DES ÉLÉMENTS FINIS
MTH8207

Automne 2021

Devoir 5	100 points
Distribué le 2021/11/17	À rendre le 2021/12/03

L'objectif des questions ci-dessous est d'utiliser le code Matlab 1D (ou Comsol Multiphysics) pour étudier numériquement les erreurs de discrétization dans les approximations obtenues par la méthode des éléments finis, et, plus particulièrement, d'évaluer les taux de convergence des solutions calculées. Il sera peut-être nécessaire de modifier certaines parties du code ou d'y ajouter de nouvelles fonctions.

Question 1 (Problème de couche limite) :

On considère le problème suivant :

$$\begin{aligned} -(\varepsilon u')' + \alpha u' = 0, &\quad \forall x \in \Omega = (0,1) \\ u = 1, &\quad \text{en } x = 0 \\ u = 0, &\quad \text{en } x = 1 \end{aligned}$$

où α représente la "vitesse" de convection et ε la viscosité cinématique du fluide. Le premier terme de l'équation différentielle est le terme de diffusion tandis que le second est le terme de convection. On choisit, afin de simplifier les calculs, de prendre $\alpha = 1$ et de varier ε seulement puisque le paramètre qui compte ici est le ratio des deux termes.

a) Calculer la solution exacte.

b) Obtenir la formulation faible du problème et montrer que celui-ci est bien posé (trouver les meilleures valeurs des constantes de continuité et de coercivité en fonction des données du problème en prenant la norme $\|u\| = \|\sqrt{\varepsilon}u'\|_{L^2}$; on note que cette dernière est une norme équivalente à la norme H^1 par l'inégalité de Poincaré).

c) Estimer les taux de convergence :

$$\alpha \approx \frac{\log \|u - u_{h_2}\| / \|u - u_{h_1}\|}{\log h_2/h_1}$$

où u_{h_1} et u_{h_2} sont deux solutions calculées sur des maillages uniformes de tailles caractéristiques h_1 et h_2, respectivement, en fonction des normes L^2 et H^1 :

$$\|u\|_{L^2} = \sqrt{\int_\Omega u^2\,dx}, \qquad u \in L^2(\Omega)$$

$$\|u\|_{H^1} = \sqrt{\int_\Omega u^2 + u'^2\,dx} = \sqrt{\|u\|^2_{L^2} + \|u'\|^2_{L^2}}, \qquad u \in H^1(\Omega)$$

et ce, pour différentes valeurs de la viscosité, e.g. $\varepsilon = 1.0$, 0.01, et 0.0001. Considérer des séries de maillages uniformes en h et p (degré des fonctions de forme) constitués d'éléments hiérarchiques, avec $p = 1, 2, 3$, et $h = 1/4, 1/8, 1/16, 1/32, \ldots, 1/1024$, et plus si nécessaire. Donner les résultats sous forme de tableaux (h, $\log \|u - u_h\|$, α) et de graphes $\log \|u - u_h\|$ en fonction de $\log 1/h$ (ou bien $\log N$, où N est le nombre de degrés de liberté). Commenter les résultats obtenus.

d) Proposer une séquence de maillages non-uniformes qui permettent d'atteindre le régime asymptotique pour un nombre plus faible de degrés de liberté que dans le cas de maillages uniformes (en particulier dans le cas où $\varepsilon = 0.0001$). Montrer les résultats sous la forme de graphes $\log \|u - u_h\|$ en fonction de $\log N$.

Question 2 (Équation de réaction-diffusion) :

On considère le problème suivant :

$$
\begin{aligned}
-u'' + u &= f, \quad \forall x \in \Omega = (0, 1) \\
u &= a, \quad \text{en } x = 0 \\
u' + u &= b, \quad \text{en } x = 1
\end{aligned}
$$

où f est une fonction scalaire définie sur Ω, et a, $b \in \mathbb{R}$. On suppose que f, a, et b sont définies telles que la solution exacte de ce problème est donnée par :

$$u(x) = x^{3/4}$$

a) Calculer f, a, et b.

b) Obtenir la formulation faible du problème et calculer la régularité de la solution (plus grande valeur de s telle que $u \in H^s(\Omega)$).

c) Estimer les taux de convergence dans les normes L^2 et H^1 sur des maillages uniformes, avec $p = 1$ et $p = 2$, et donner les graphes log-log de l'erreur en fonction du nombre de degrés de liberté N.

d) Commenter les résultats obtenus.

SOLUTIONS

<u>QUESTION 1 (60 POINTS) :</u>

a) On peut poser $v = u'$ et résoudre : $-\varepsilon v' + v = 0$. C'est une équation du 1er ordre à variables séparables dont la solution générale est donnée par : $v(x) = u'(x) = Ce^{x/\varepsilon}$. Après intégration, on a :

$$u(x) = C_1 e^{x/\varepsilon} + C_2$$

En appliquant les conditions aux limites, on obtient les constantes $C_1 = (1 - e^{1/\varepsilon})^{-1}$ et $C_2 = -e^{1/\varepsilon}(1 - e^{1/\varepsilon})^{-1}$. La solution particulière est donc :

$$\boxed{u(x) = \frac{e^{1/\varepsilon} - e^{x/\varepsilon}}{e^{1/\varepsilon} - 1}}$$

Pour des petites valeurs de ε, la quantité $e^{1/\varepsilon}$ est très grande et incorrectement évaluée sur ordinateur. Il est donc judicieux de multiplier le dénominateur et le numérateur par $e^{-1/\varepsilon}$ pour réécrire la solution sous la forme :

$$\boxed{u(x) = \frac{1 - e^{-(1-x)/\varepsilon}}{1 - e^{-1/\varepsilon}}}$$

b) La formulation faible du problème est donnée par :

$$\text{Trouver } u \in U \text{ telle que : } \quad B(u, v) = 0, \quad \forall v \in V$$

où $U = \{u \in H^1(\Omega);\ u(0) = 1 \text{ et } u(1) = 0\}$, $V = H_0^1(\Omega)$, et :

$$B(u, v) = \int_0^1 \varepsilon u'v' + u'v dx$$

On note que U n'est pas un espace vectoriel. On utilise la fonction de relèvement $\bar{u}(x) = 1 - x \in H^1(\Omega)$ de sorte que $u = w + \bar{u}$, où la fonction w satisfait le problème suivant :

$$\text{Trouver } w \in V \text{ telle que : } \quad B(w, v) = -B(\bar{u}, v) = \int_0^1 \varepsilon v' + v dx \equiv F(v), \quad \forall v \in V$$

L'espace V, muni de la norme :

$$\|v\|_V = \sqrt{\int_0^1 \varepsilon (v')^2 dx} = \sqrt{\varepsilon}\|v'\|,$$

est un espace de Hilbert. Ici, on désigne par $\|v\|$ la norme L^2 de v. On démontre ci-dessous que B est continue et coercive et que F est continue sur V.

Continuité de B : En utilisant Cauchy-Schwarz et l'inégalité de Poincaré, c'est-à-dire $\|v\| \leq C_p\|v'\|$ pour tout $v \in V$ avec $C_p = 1$, on obtient :

$$\begin{aligned} |B(w, v)| &\leq \varepsilon\|w'\|\|v'\| + \|w'\|\|v\| \\ &\leq \varepsilon\|w'\|\|v'\| + C_p\|w'\|\|v'\| \\ &\leq (1 + C_p\varepsilon^{-1})\|w\|_V\|v\|_V \end{aligned}$$

B est donc continue et la constante de continuité est donnée par $M = 1 + C_p\varepsilon^{-1}$. Pour $\varepsilon \ll 1$, on observe que $M \approx C_p\varepsilon^{-1}$.

Coercivité de B : Comme

$$\int_0^1 2w'w dx = \int_0^1 (w^2)' dx = w^2(1) - w^2(0) = 0,$$

on a :

$$B(w,w) = \int_0^1 \varepsilon(w')^2 dx = \varepsilon\|w'\|^2 = \|w\|_V^2$$

La forme B est donc coercive de constante de coercivité $\alpha = 1$.

Continuité de F : La continuité de F se déduit immédiatement de celle de B puisque :

$$|F(v)| = |B(\bar{u}, v)| \leq (1 + C_p\varepsilon^{-1})\|\bar{u}\|_V\|v\|_V \leq (\varepsilon^{1/2} + C_p\varepsilon^{-1/2})\|v\|_V$$

où l'on a utilisé le fait que $\bar{u} = 1 - x$, ce qui implique que $\|\bar{u}\|_V = \sqrt{\varepsilon}\|\bar{u}'\| = \sqrt{\varepsilon}$. La forme F est donc continue et la constante de continuité est donnée par $C = \varepsilon^{1/2} + C_p\varepsilon^{-1/2}$. Cette dernière vaut $C \approx C_p\varepsilon^{-1/2}$ lorsque $\varepsilon \ll 1$.

c) Pour $\varepsilon \ll 1$, on note que $M/\alpha = \varepsilon^{-1}$. Ce quotient est donc très grand pour de très faibles valeurs de ε. Ceci explique le fait que les oscillations soient plus sévères lorsque $\varepsilon = 0.0001$. It faut alors utiliser des maillages plus fins pour les éliminer et atteindre le régime asymptotique. De plus, la solution exacte du problème est infiniment différentiable sur $(0, 1)$. Les ordres théoriques de convergence $\mathcal{O}(h^\alpha)$ (à ne pas confondre avec la constante de coercivité) sont donc donnés par $\alpha = p+1$ pour la norme L^2 et $\alpha = p$ pour la norme H^1, où p est le degré des polynômes utilisés. Il faut cependant avoir recours à des maillages très fins, lorsque ε est choisi petit, pour obtenir de bonnes approximations numériques des ordres théoriques de convergence.

d) On suggère ici une approche possible pour obtenir un maillage non uniforme adapté à la solution que l'on recherche. L'idée est de partir d'un maillage uniforme et de le transformer en un maillage non uniforme par une transformation strictement croissante et bijective de $(0, 1)$ dans $(0, 1)$, qui devrait a priori dépendre du paramètre ε. Soit $x = T(\xi)$ une telle transformation. La construction d'une telle transformation n'est malheureusement pas triviale et il est difficile de trouver celle qui serait optimale en fonction d'un objectif donné.

Question 2 (40 Points) :

a) Les valeurs de a, b, et f en utilisant la solution exacte $u(x) = x^{3/4}$ sont :

$$\boxed{\begin{array}{l} a = 0 \\ b = \dfrac{3}{4} + 1 = \dfrac{7}{4} \\ f(x) = \dfrac{3}{16}x^{-5/4} + x^{3/4} \end{array}}$$

b) La formulation faible du problème consiste à trouver $u \in V$, avec $V = \{v \in H^1(0,1);\ v(0) = 0\}$, telle que

$$\int_0^1 u'v' + uv\,dx + u(1)v(1) = \int_0^1 \left[\frac{3}{16}x^{-5/4} + x^{3/4}\right] v\,dx + \frac{7}{4}v(1), \qquad \forall v \in V$$

La solution $u(x)$ est une fonction de la forme x^α avec $\alpha = 3/4$. Comme $1/2 < \alpha \leq 3/2$, on en déduit que $u \in H^1(0,1)$ mais $u \notin H^2(0,1)$. La régularité de u vaut donc $s = 1$. Plus précisemment, on a :

$$\|u\|_{L^2}^2 = \int_0^1 u^2 dx = \int_0^1 x^{3/2} dx = \frac{2}{5}x^{5/2}\Big|_0^1 = \frac{2}{5}$$
$$\|u'\|_{L^2}^2 = \int_0^1 (u')^2 dx = \int_0^1 \frac{9}{16}x^{-1/2} dx = \frac{9}{8}x^{1/2}\Big|_0^1 = \frac{9}{8}$$

soit :

$$\|u\|_{L^2} = \sqrt{2/5}$$
$$\|u\|_{H^1} = \sqrt{\|u\|_{L^2}^2 + \|u'\|_{L^2}^2} = \sqrt{2/5 + 9/8} = \sqrt{61/40} \approx \sqrt{3/2}$$

mais l'intégrale :

$$\int_0^1 (u'')^2 dx = \int_0^1 \frac{9}{256}x^{-5/2} dx = -\frac{3}{128}x^{-3/2}\Big|_0^1$$

n'est pas définie.

c) A priori, en utilisant suffisamment d'éléments et de points de Gauss, on obtient les taux de convergence $\alpha_{L^2} = 1.25$ et $\alpha_{H^1} = 0.25$.

d) On remarque que $\alpha_{L^2} = \alpha_{H^1} + 1$, comme le prédit la théorie, mais les taux ne correspondent aux valeurs théoriques $\alpha_{L^2} = 1$ et $\alpha_{H^1} = 0$. On sait que le taux de convergence théorique pour la norme H^1 est donné par :

$$\alpha_{H^1} = \min(p, r)$$

avec $r = s - 1$ lorsque $u \in H^s(\Omega)$. Ici, on a $\alpha_{H^1} = 0.25 = r = s - 1$, ce qui impliquerait que $s = 1.25$. En fait, on peut montrer que $u \in H^s$ avec $s = 1.25$ et on parle alors d'un espace de Hilbert d'ordre fractionnaire.